Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar @ taljaren. se

oktober 2008

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till gymnasielärare och alla andra intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Det materialet publiceras i kommande nummer. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 Hur runt?

Jag har stött på en kul sajt `http://www.howround.com/` som innehöll väldigt mycket roligt rörande geometri. Jag har beställt en bok som är kopplad till sajten. Boken heter *How round is your circle?* av John Bryant och Chris Sangwin. Den handlar om matematik och skapande. Jag är övertygad om att den kommer ge massor av roliga ideer. Besök sajten och titta på allt de hittar på där!

2 κappa 2008

Årets tävling är över för min del eftersom jag gjorde det klassiska misstaget att antaga att ett polynom har ett reellt nollställe.

Frågan var om det fanns reella polynom p som uppfyller $(p(x))^2 - 1 = p\left(x^2+1\right)$ för alla x? Min lösning byggde på att visa att vänsterledet och högerledet var polynom som hade en distinkt skillnad i rötterna. Det lyckades jag med, men vad hjälper det med felaktiga grunder?

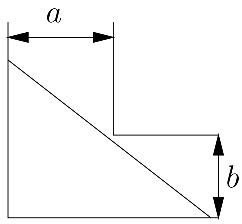
Det blir en ny tävling nästa år och jag uppmanar alla lärare att ställa upp!

3 Kontrollera alltid priset!

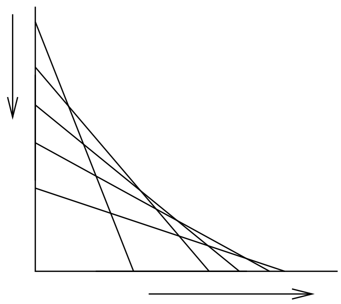
I frysdisken ser jag hallon som kostar 79 kr/kg, blåbär kostar 116 kr/kg och blandningen av hallon och blåbär kostar 75 kr/kg. Jag väntar på en förklaring av detta fenomen.

4 Flytta något runt ett hörn

En uppgift som man brukar se lite här och var handlar om hur pass lång flaggstång man kan bära i en L-formad korridor. Situationen är som beskrivs i figuren, en stång skall flyttas runt ett skarpt hörn där en korridor med bredden a möter en korridor med bredden b under rät vinkel.



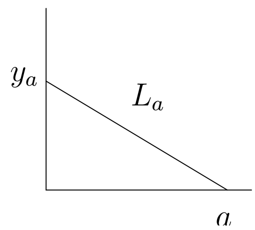
Jag kom att tänka på att detta problem är ju relaterat till frågan; vilken kurva erhålls då man låter sträckan mellan en punkt på y-axeln och en punkt på x-axeln, med fixt avstånd mellan sig, utgöra en generatris; varpå man flyttar punkterna men bibehåller det fixa avståndet mellan punkterna. Se figur 1.



Figur 1: En sträcka av fix längd genererar en kurva då den glider längs koordinataxlarna

Kurvans utseende bestäms av längden på sträckan och man kan lätt tänka sig att man lägger till ett hörn som begränsar kurvan.

Jag frågar mig, vad är det för kurva som skapas på detta sätt? Låt oss antaga att längden på sträckan är L. Sträckan med ena ändpunkten $(a,0)$ kallar vi L_a som i figuren Det gäller då att den andra ändpunkten y_a uppfyller $y_a^2 + a^2 = L^2$. Sträckans ekvation blir



Figur 2: Sträckan $L_a$med ändpunkt $(a,0)$

$$y_a(x) = y_a - \frac{y_a}{a}x = y_a\left(1-\frac{x}{a}\right) = \sqrt{L^2-a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right) \quad (1)$$

Tänk dig nu att vi har ritat upp oändligt många sträckor som uppfyller villkoren och vi har på så sätt fått fram vår kurva. Betrakta nu ett fixt x-värde, $x=b$. Till denna punkt finns ett y-värde, och detta y-värde måste då vara det högsta y-värdet för alla sträckor som skär $x=b$. Vi vill alltså för givet b finna det a som ger oss det största $y_a(b)$ beräknat ur (1). Vi betraktar

$$y_a(b) = \sqrt{L^2-a^2}\left(1-\frac{b}{a}\right) \quad (2)$$

och antager att b är fixt och deriverar med avseende på a.

Det ger

$$\frac{d}{da}y_a(b) = \frac{-2a}{2\sqrt{L^2-a^2}}\left(1-\frac{b}{a}\right)+\sqrt{L^2-a^2}\left(\frac{b}{a^2}\right) =$$

$$= -\frac{a-b}{\sqrt{L^2-a^2}}+\sqrt{L^2-a^2}\frac{b}{a^2}$$

Sätt nu $\frac{d}{da}y_a(b) = 0$ och vi får ekvationen

$$\frac{a-b}{\sqrt{L^2-a^2}} = \sqrt{L^2-a^2}\frac{b}{a^2}$$

$$a-b = \left(L^2-a^2\right)\frac{b}{a^2}$$

$$a^3-ba^2 = L^2b-a^2b$$

som ger

$$a^3 = L^2b$$

Vi får alltså $a = L^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. Detta skulle vi kunna sätta in i (2) och erhålla ett föga spännande förenklings arbete. Sätt istället in $b = \frac{a^3}{L^2}$ och erhåll

$$y_a(b) = \sqrt{L^2-a^2}\left(1-\frac{\frac{a^3}{L^2}}{a}\right) =$$

$$L\sqrt{1-\frac{a^2}{L^2}}\left(1-\frac{a^2}{L^2}\right) = L\left(1-\frac{a^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Vi får alltså $a = L^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. Sätt in detta i (2) och erhåller

$$y_a(b) = \sqrt{L^2-L^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{b}{L^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$\sqrt{L^2-L^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\left(1-b^{\frac{2}{3}}L^{\frac{-2}{3}}\right) =$$

$$L\sqrt{1-b^{\frac{2}{3}}L^{\frac{-2}{3}}}\left(1-b^{\frac{2}{3}}L^{\frac{-2}{3}}\right)$$

$$y_a(b) = L\left(1-\left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Dividera med L och upphöj med $2/3$ och erhåll

$$\left(\frac{y_a(b)}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{2}{3}} \iff \left(\frac{b}{L}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y_a(b)}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Kurvan utgörs alltså av de punkter x och y sådana att

$$\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{3}$$

Att gå runt ett hörn innebär då en begränsning som säger att kurvan skall tangera en viss punkt (a,b) men får ligga högre för $x = a$. För $x > a$ är kurvan naturligt avtagande så där är inget problem. Vi ser även att (1) säger att ett större värde på L ger ett större värde på y. Alltså kommer den tangerande kurvan vara den kurva med det största tillåtna värdet på L. Givet att $x = a$ och $y = b$ ligger på kurvan får vi ur (3) att

$$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$$

d.v.s.

$$L = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

För fallet med $a = b$ får vi

$$L = \left(2\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}a = 2a\sqrt{2}$$

Som övning till läsaren lämnas att konstatera detta genom att göra en skiss över situationen.

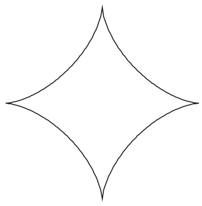
5 Fler kurvor

Det är ju bekannt att man kan beskriva en cirkel med ekvationen $x^2+y^2 = 1$ och man kan rita en sådan genom att använda en passare alternativt förbinda en penna med en nål genom ett snöre och sedan fästa nålen och rita med snöret spännt hela tiden.

Men vilka figurer får vi om istället vill rita upp de mer generella figurerna $x^n+y^n = 1$ för olika värden på n? Vi har precis behandlat fallet med $n = 2/3$.

5.1 n = 2/3

Jag illustrerar hela kurvan med en bild.



Figur 3: Fallet $n = 2/3$

5.2 n = 1/2

I exemplet med $n = 2/3$ så flyttade sig ändpunkterna på linjerna som ritar upp figuren olika fort (eftersom linjerna hade konstant längd) men för att få $n = 1/2$ måste avståndet mellan ändpunkterna variera men ändpunkterna måste röra sig med samma hastighet utmed koordinataxlarna. Då den ena pnkten är i $y = t$ så måste den andra vara i $1-t$.

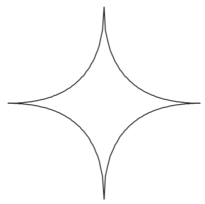
Du kan själv lätt verifiera att linjen som har y-koordinaten t att ekvationen för linjen är

$$L_t(x) = \frac{t}{1-t}x+t$$

För ett givet värde $x = a$ vilken linje får det största y-värdet? Derivera med avseende på t och erhåll

$$D_t\left(L_t(a)\right) = D_t\left(\frac{ta}{t-1}+t\right) = 1+aD_t\left(\frac{t}{t-1}\right) = 1-\frac{a}{(t-1)^2}$$

$D_t\left(L_t(a)\right) = 0$ löses med avseende på t och vi erhåller lösningen $t = 1-\sqrt{a}$, den andra lösningen bortses från då vi har kravet $t \in [0,1]$. Det ger $y(a) = L_{1-\sqrt{a}}(a) = (\sqrt{a}-1)^2$. Då $a \geq 0$ och $y(a) \geq 0$ så gäller även att $\sqrt{a}+\sqrt{y(a)} = 1$, d.v.s. $n = 1/2$.



Figur 4: Fallet $n = 1/2$

5.3 Normer

Inom matematiken använder man begreppet *norm*. Givet en vektor x ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) så skriver vi normen som $||x||$. Normen på en vektor uppfyller följande kriterier

$$||x|| > 0 \text{ om } x \neq 0 \text{ och } ||x|| = 0 \text{om } x = 0$$
$$||kx|| = |k| \cdot ||x|| \text{ för varje skalär } k$$
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Den skall alltså alltid vara positiv för varje element skillt från 0, och endast vara noll då vektorn också är noll. Förlänger man vektorn skall normen skalas med samma faktor; d.v.s. om en vektor blir 4 gånger längre skall även normen av vektorn bli 4 gånger större. Det sista villkoret säger att normen av summan av två vektorer skall vara mindre eller lika med summan av normerna för var och en av vektorerna.

Man definierar följande *familj*[1] av normer

$$||x||_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$$

kallade $p-norm$. De populäraste fallen är då $p = 1, 2, \infty$.

$$||x||_1 = \sum_i |x_i|$$
$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$
$$||x||_\infty = \max_i |x_i|$$

där vi kallar $||x||_\infty$ för *oändlighetsnormen*. Enkelt uttryckt är oändlighetsnormen lika med det element som har störst absolutbelopp. Jag hoppas att du lätt kan tänka dig att så är fallet eftersom det elementet kommer dominera för varje p-norm då p blir ohygligt stort. Approximativt kan vi tänka oss att om x_1 är det element som är störst till absolutbelopp, så får vi

$$\sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \ldots} \approx \sqrt[p]{x_1^p + \text{mycket lite}} \approx \sqrt[p]{x_1^p} = |x_1|$$

Då vi låter p gå mot oändligheten så kommer vi bara få kvar $|x_1|$.

2-normen säger att vektorn (x, y) har normen $\sqrt{x^2 + y^2}$. Om vi skulle rita in ett koordinatsystem på ett rutat papper och säga att vektorn (x, y) svarar mot punkten (x, y) skulle normen av vektorn $||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alla punkter som har normen 1 är då de som ingår i cirkeln $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. 2-normen kallas även för den *euklidiska normen.*

[1] Med familj menar vi en hel samling utav normer som har något gemensamt.

5.4 Övningar till läsarna

1. Vad får vi om vi använder 1-normen?
2. Vad får vi om vi använder oändlighetsnormen?
3. Konstrurera och rita egna kurvor för andra värden på n. Om du kommer på något finurligt sätt så hör av dig!