Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar @ taljaren. se

sommar 2008

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till gymnasielärare och alla andra intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Det materialet publiceras i kommande nummer. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 κappa 2008

Fråga 3 är ute och redan besvarad. Den löd:

1.1 Fråga

1. Finns det en cirkel på vilken sex olika punkter ligger så att alla 15 parvisa avstånd mellan dessa punkter är heltal?

2. Finns fyra punkter i planet som inte ligger på någon cirkel och där ingen linje innehåller tre av dem, och där alla sex parvisa avstånd mellan två av punkterna är heltal?

Svaret är ja på båda frågorna.

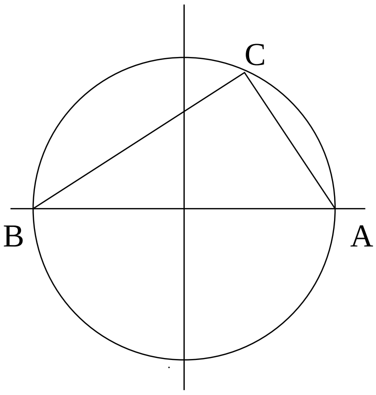
1.2 Delfråga 1

Jag utgår från en enhetscirkel och placerar två av punkterna i $A = (1,0)$ respektive $B = (-1,0)$. För att få in en tredje punkt placerar jag en 3-4-5 triangel med hypotenusan som AB. Det ger en tredje punkt C med koordinaterna (a,b) med $a,b > 0$ (se figur 1). Vi har då att $AB = \frac{5}{5} \cdot 2 = 2$ och $BC = \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8}{5}$ och $AC = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$. Enligt figur (1) gäller då

$$(1-a)^2 + b^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

och

$$(1+a)^2 + b^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2$$



Figur 1: Enhetscirkel med punkterna A, B och C

där $\frac{6}{5}$ och $\frac{8}{5}$ är längderna på hypotenusorna AC respektive BC. Ur dessa ekvationer får vi

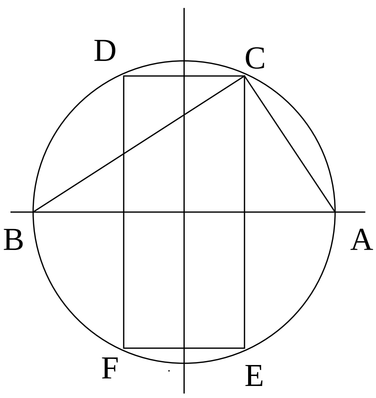
$$1 + a^2 + b^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 2a = \left(\frac{8}{5}\right)^2 - 2a$$

som ger $a = \frac{8^2-6^2}{4\cdot 5^2} = \frac{28}{4\cdot 25} = \frac{7}{25}$ och ur $a^2 + b^2 = 1^2$ får vi $b = \sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = \frac{24}{25}$. Vill vi kan vi verifiera att $BC = \frac{8}{5}$ genom

$$BC = \sqrt{\frac{24^2}{25^2} + \left(1 + \frac{7}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{576+1024}}{25} = \frac{\sqrt{1600}}{25}$$

$$BC = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$$

Nu kommer det fina knepet, vi använder symmetri och lägger in speglingar av punkten C i de båda koordinataxlarna och får som figur 2 visar.

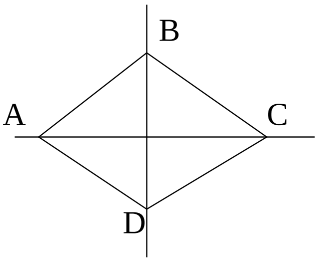


Figur 2: De sex punkterna

I figuren gäller direkt att $BC = AD = AF = BE = \frac{8}{5}$. Diagonalerna $CF = DE = AB = 2$. $CA = BD = BF = AE = \frac{6}{5}$. Avstånden $DC = FE = 2a = \frac{14}{25}$ och $CE = DF = 2b = \frac{48}{25}$. Alla dessa avstånd är rationella tal och genom att välja en cirkel med radien 25 får vi avstånd som är 40, 50, 30, 14 respektive 48; alla är heltal.

1.3 Delfråga 2

Vi placerar ut punkterna i ett koordinatsystem så som i figur 3.



Figur 3: Fyra punkter som ej ligger på en cirkel eller alla på samma linje.

Vi sätter A och C på avståndet 4 från origo och B och D på avståndet 3. Det ger att $AB = AD = BC = CD = 5$ enligt Pythagoras sats och $AC = 8$ och $BD = 6$.

Ingen cirkel går genom alla fyra punkterna eftersom $AC = 8$ innebär att radien måste vara minst 4 och en cirkel genom A, B och C ligger på linjen genom B och D men avståndet BD är bara 6 och då kan inte en cirkel med radie > 4 gå genom alla fyra punkterna. Ej heller ligger tre av dessa punkter på en linje.

1.4 Fråga 4

Nästa fråga lyder:

Finns det reella polynom p som uppfyller $(p(x))^2 - 1 = p\left(x^2+1\right)$ för alla x? Bestäm i så fall dessa.

2 Fakta om pi?

I Aftonbladet[1] kan man läsa

> *Fakta: Pi är ett tal som anger förhållandet mellan längden av en cirkels periferi och längden av dess diameter.*
>
> *Det kännetecknas bland annat av att det är oändligt – enligt vad som hittills är känt.*
>
> *En japansk vetenskapsman lät år 2002 en dator försöka räkna fram hur många decimaler talet har. Han gav upp efter att ha räknat fram 1,24 biljoner decimaler*

Något har blivit lite fel här.

[1] http://www.aftonbladet.se/nyheter/article2732509.ab