Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar @ taljaren. se

april 2008

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till gymnasielärare och alla andra intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Det materialet publiceras i kommande nummer. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 Strömsparande

Jag blev tipsad om ett kul problem av Mats Åkesson. Problemet finns här `http://icpcres.ecs.baylor.edu/onlinejudge/external/1/151.pdf`. Det handlar om att du har N olika områden, numrerade 1, 2, 3, ..., N. Börja på område 1 och tag sedan bort detta, och sedan vart m:te område. När du passerar det sista elementet så börjar du om på det första kvarvarande elementet.

T.ex. om $N = 7$ och $m = 5$ får vi

```
1 2 3 4 5 6 7
```

Tag bort 1 och sedan kommer vi till 6 som skall bort.

```
_ 2 3 4 5 _ 7
```

Nu räknar vi 7, 2, 3, 4, 5 och tar bort 5.

```
_ 2 3 4 _ _ 7
```

Enkelt ser du att det element som blir sist kvar är 2.

Problemet är: tänk dig att du alltid har minst 13 element, och så vill du att det sista elmentet som är kvar alltid skall vara 13. För ett givet värde på N, försök finna en algoritm som ger dig det minsta positiva värdet på m och som ger dig 13 kvar sist.

Det går att skriva ett litet datorprogram för detta och givet N får man följande värden på det minimala m:et.

N	m
17	7
100	66
300	1580

Här ser man något festligt (förutsatt att min algoritm stämmer)! För $N = 300$ får vi ett $m = 1580$ som är betydligt mycket större än N. Det är ju lite festligt. Vi frågar oss hur pass stort m kan bli givet ett N. Finns det någon enkel övre gräns för m?

Efter att ha provat med $N = 13$ och $m = 22$ (det rätta svaret är $m = 1$ för $N = 13$) bara för att testa, så upptäckte jag hur mycket koncentration detta kräver.[1]

Som avslutning kan jag nämna att jag lät mitt datorprogram köra under ett par dagar och fick då fram m för alla $20 \leq N \leq 75000$. Det största värde på m jag fann var för $N = 64\,661$ som gav $m = 677\,754$. Siffrorna var inte så intressanta, men om jag beräknade m/N för varje värde på N så var medelvärdet för alla dessa kvoter 0,99950 vilket ju är ganska nära 1.

1.1 Fråga till läsarna!

Vilket tal blir kvar om du utgår från $N = 21$ och tar bort var 29:e element? När du kommer till slutet så börjar du så klart om från början.

2 κappa 2008

Så här löd första frågan i tävlingen.

> Fatima och Kevin bakar bullar och kakor till ett föräldramöte. De tänker sälja bullarna för 10 kr och kakorna för 5 kr som ett bidrag till klasskassan. Av Kevins pappa har de fått en och en halv liter mjöl, 100 gram smör och övriga ingredienser. Till varje bulle går det åt 7 cl mjöl och 5 gram smör och till varje kaka går det åt 4 cl mjöl och 2 gram smör. Vilket blir det maximala bidraget till klasskassan om de räknar med att kunna sälja sammanlagt högst 30 bakverk, antingen bullar eller kakor?

Av 126 svar blev 97 godkända och 29 underkända.

2.1 Lösning - räta linjer

Detta problem är lämpligt att titta på i samband med att man tar upp räta linjens ekvation. D.v.s. senast i Matematik B-kursen.

Enligt förutsättningarna har de har 150 enheter mjöl och 100 enheter smör. En bulle kräver 7 enheter mjöl och 5 enheter smör samt inbringar 10 kr. En kaka förbrukar 4 enheter mjöl, 2 enheter smör och ger 5 kr.

Om vi antar att de säljer x bullar och y kakor så gäller det att maximera inkomsten $f(x,y)$ som ges av

$$f(x,y) = 10x + 5y \tag{1}$$

där vi har kravet att

$$x + y \leq 30 \tag{2}$$

[1] Här kan man ana en rejäl frustration över ens bristande koncentrationsförmåga.

Om vi betraktar förbrukningen av mjölet så får vi olikheten

$$7x+4y \leq 150 \tag{3}$$

och för smöret

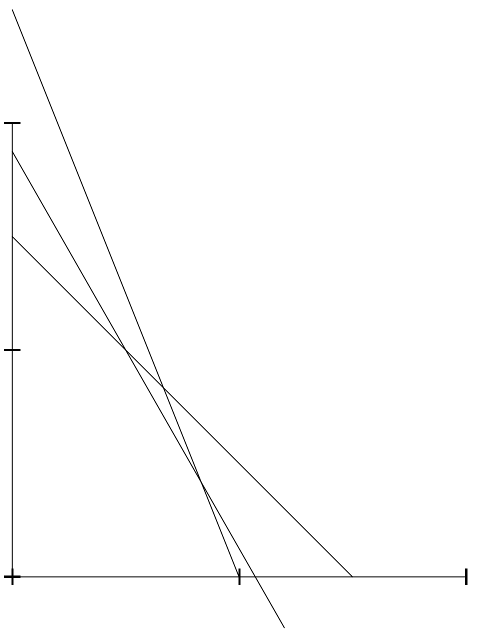
$$5x+2y \leq 100 \tag{4}$$

Uttrycken (2), (3) och (4) ger oss ett antal olikheter som alla måste vara uppfyllda. Låt oss rita upp dessa i ett koordinatsystem.

För att t.ex. rita upp $x+y \leq 30$ så är det lämpligast att lösa ut y och få

$$y \leq 30-x$$

Rita sedan kurvan $30-x$ och du vet att y måste vara mindre än detta värde. De tre olikheterna ger oss figur 1.



Figur 1: De tre olikheterna är ritade i ett och samma koordinatsystem.

Nu vet vi att vi för ett fixt värde på x måste befinna oss under alla tre linjerna vilket ger oss ett konvext område som den optimala punkten måste ligga inom.

Skärningspunkterna hittar vi lätt genom att göra om olikheterna till likheter och lösa de tre ekvationerna

$$\begin{cases} x+y &= 30 \\ 7x+4y &= 150 \end{cases}$$

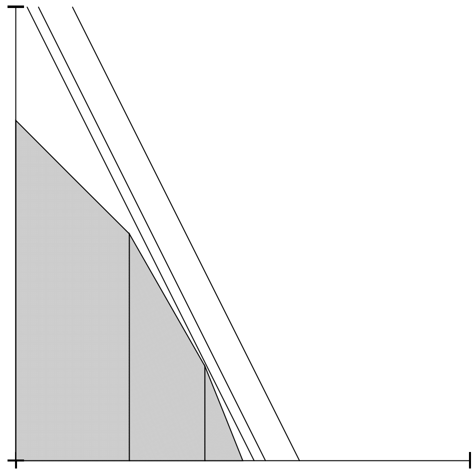
$$\begin{cases} x+y &= 30 \\ 5x+2y &= 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+4y &= 150 \\ 5x+2y &= 100 \end{cases}$$

som ger oss hörnen

$$\begin{cases} x = & 10 \\ y = & 20 \end{cases} \begin{cases} x = & \frac{40}{3} \\ y = & \frac{50}{3} \end{cases} \begin{cases} x = & \frac{50}{3} \\ y = & \frac{25}{3} \end{cases}$$

Se figur 2.



Figur 2: Det konvexa området som vi skall optimera inom. De extra linjerna visar olika “inkomstkurvor” på formen $10x+5y=m$ för olika värden på m.

Vad får vi ut av detta nu då? Jo, vi vet att inkomsten $f(x,y)$ ges av

$$f(x,y) = 10x+5y$$

Kalla inkomsten m så blir det ännu tydligare. Det gäller att inkomsten ligger på linjen $10x+5y=m$. Vi skulle kunna rita ut flera sådana linjer för olika värden på m, men det är bara en som har högst värde på m och tangerar området. Den linje med störst värde på m ger oss störst inkomst. Med grafisk lösning ritar vi in linjer med rätt lutning och bestämmer på så sätt m.

Men hur gör vi en icke-grafisk lösning? Det enklaste vore att undersöka värdena på $10x+5y$ i punkterna där linjerna skär varandra eller koordinatsystemets axlar. Dessvärre har vi ett diskret problem här. Vi kan räkna ut en exakt lösning men den lösningen kan ändå behöva modifieras så att vi hamnar i en punkt med heltalskoordinater.

I figuren ser vi att vi inte behöver bekymra oss om $x < 10$. Låt oss därför testa oss fram med olika värden på x och y. I tabellen visas för ett fixt värde på x de maximala värden på y som vi får genom att betrakta de tre olika begränsningarna. I sista kolumnen beräknas inkomsten.

x	$30-y$	$\frac{150-7x}{4}$	$\frac{100-5x}{2}$	$10x+5y$
10	20	20	25	200
11	19	18	22	200
12	18	16	20	200
13	17	14	17	200
14	16	13	15	205
15	15	11	12	205
16	14	9	10	205
17	13	7	7	205
18	12	6	5	205
19	11	4	2	200
20	10	2	0	200

Den största inkomsten är sålunda 205.

2.2 Problem 2

Det lyder så här:

> Sex städer $S_1, \ldots, S_6$ är förbundna med fem vägar mellan grannstäder på så sätt att man kan komma från vilken stad som helst till vilken annan stad som helst. Då finns ett unikt sätt att ta sig från en godtycklig stad till vilken annan stad som helst genom att åka på en eller flera av de fem vägarna.
>
> Konstruera en karta med avstånd angivna på de fem vägarna som uppfyller att de totalt 15 avstånden mellan S_i och S_j, $i < j$, antar värdena 1, 2, 3, ..., 15.

Tiden för att lämna in lösningar har precis gått ut, jag var tydligen lite sen med detta nummer av Täljaren. Jag tyckte ändå inte problemet var speciellt intressant. Jag fick en tanke om att om man har en väg som har längden 8 så räcker det att alla andra vägar kan bilda längderna 1,2,3,4,5,6,7 och man kan nå vägen med längd 8, så är problemet löst. Det var inte riktigt denna lösning jag fick fram, utan jag provade mig fram till slut. Jag hoppas de presenterar en riktigt kreativ lösning.

2.3 Problem 3

Det är tudelat.

1. Finns det en cirkel på vilken sex punkter ligger så att alla 15 parvisa avstånd mellan dessa punkter är heltal?

2. Finns fyra punkter i planet som inte ligger på någon cirkel och där ingen linje innehåller tre av dem, och där alla sex parvisa avstånd mellan två av punkterna är heltal?

3 Eulers ekvation av grad 4

På `http://mathgateway.maa.org/do/ViewMathNews?id=285` kan man läsa att Daniel J. Madden (University of Arizona) och Lee W. Jacobi har funnit ett sätt att generera oändligt många lösningar till Eulers ekvation av grad 4 (som ser ut så här)

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a+b+c+d)^4$$

Jag skall försöka hitta artikeln som de har skrivit och se hur mycket man förstår av den.

4 Aralsjön

På internet kan man hitta uppgiften att Aralsjön har minskat ytan med 55% och volymen med 80% och vattenytans nivå har sjunkit 19 m. Det här borde man ju kunna räkna på tänkte jag. Vilken form har sjön? Låt oss formulera det som en uppgift till eleverna.

> *Bestäm en geometrisk form på sjön som gör att de givna uppgifterna om vattnets försvinnande inte är motsägelsefulla.*

Låt oss först testa en form vi känner väl till. Antag att sjön är konformad och idag har djupet h och en radie r. Den geometriska formen säger oss att $r = kh$ för någon konstant k. Det gäller då att den ursprungliga arean var

$$\pi\,(k\,(h+19))^2$$

och areaminskningen ger oss

$$\frac{\pi\,(kh)^2}{\pi\,(k\,(h+19))^2} = 0{,}45 = \frac{9}{20} \iff$$

$$20h^2 = 9\,(h+19)^2$$

som ger

$$h = \frac{171 + 114\sqrt{5}}{11} \approx 38{,}7$$

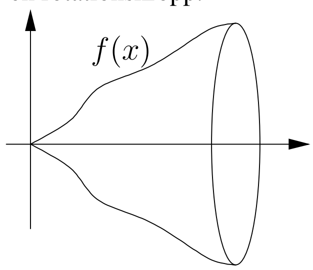
Volymminskningen ger oss

$$\frac{\pi}{3} h(kh)^2 = 0{,}20 \cdot \frac{\pi}{3}(h+19)\,(k(h+19))^2$$

som ger

$$5h^3 = (h+19)^3 \Rightarrow h \approx 26{,}7$$

Om de mätdata som är givna stämmer så kan Aralsjön inte ha varit konformad. Vilka andra former kan vi välja på sjön? Låt oss för enkelhets skull antaga att sjön har formen av en rotationskropp.



Vi låter sjöns form beskrivs av en funktion $f(x)$ som vi nu vill bestämma. Vi antar att $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och $f(0) = 0$ och $f(x) > 0$ för alla $x > 0$.

Om h är den nuvarande höjden får vi följande villkor när vi ställer upp uttryck för areaminskningen respektive volymminskningen.

$$\pi f(h)^2 = \frac{9}{20}\pi f(h+19)^2$$

$$\pi \int_0^h f(x)^2\,dx = \frac{1}{5}\pi \int_0^{h+19} f(x)^2\,dx$$

som förenklas till

$$20f(h)^2 = 9f(h+19)^2 \qquad (5)$$

$$5\int_0^h f(x)^2\,dx = \int_0^{h+19} f(x)^2\,dx \qquad (6)$$

som kan förenklas till

$$4\int_0^h f(x)^2\,dx = \int_h^{h+19} f(x)^2\,dx \qquad (7)$$

Nu vet jag inte riktigt vad man skall göra med dessa ekvationer för att komma vidare, men jag kan i alla fall göra en liten ansats. Antag att $f(x) = Cx^k$ för reella konstanter $C > 0$ och k. Det ger oss

$$20C^2h^{2k} = 9C^2\left(h+19\right)^{2k} \Rightarrow 20h^{2k} = 9(h+19)^{2k} \tag{8}$$

och

$$5\int_0^h C^2x^{2k}\,dx = \int_0^{h+19} C^2x^{2k}\,dx$$

som efter förenklig ger

$$5h^{2k+1} = (h+19)^{2k+1} \tag{9}$$

Sätter vi in (8) i (9) så erhåller vi

$$5h \cdot \frac{9(h+19)^{2k}}{20} = (h+19)^{2k+1} \iff$$

$$9h = 4(h+19) \iff h = \frac{76}{5} = 15{,}2$$

Ur (8) får vi

$$2k\log h + \log 20 = 2k\log(h+19) + \log 9$$

som vi sätter in $h = \frac{76}{5}$ i och erhåller

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 20 - \log 9}{\log\frac{171}{5} - \log\frac{76}{5}}\right) = \frac{\log(20/9)}{2\log(9/4)} \approx 0{,}4923$$

Därmed har vi hittat en form på sjön som uppfyller villkoren; nämligen

$$f(x) = Cx^{\frac{\log(20/9)}{2\log(9/4)}},\ C \in \mathbf{R}^+$$

4.1 Efterlysning

Om någon har förslag på vad man kan göra med ekvationerna (5) och (6) så uppmanar jag denne att höra av sig.