# Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar @ taljaren. se

julen 2007

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till alla intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Det materialet publiceras i kommande nummer. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

## Innehåll



## 1 $\kappa$appa 2007

Matematiktävlingen för lärare, $\kappa$appa 2007, är nu över. Jag kom på tredjeplats. Totalt började 137 lärare i början av året och vi var dussintalet som samlades i Stockholm för en trevlig avslutningsceremoni med ett intressant matematiskt innehåll av Torsten Ekedahl och Mikael Passare.

Tyvärr meddelades det att alla hade glömt bort den tomma mängden i sista frågan. Jag skall försöka att aldrig glömma bort den igen. Den tomma mängden är den enda delmängden av heltalen vars element är både jämna och udda. Vi fick också veta av Clas Löfwall att sista uppgiften var en omskrivning av ett problem rörande Lie-algebror. Om Lie-algebror är min kunskap för tillfället väldigt begränsad, men jag hoppas kunna ändra på det. Lennart Börjesson gick igenom uppgiften med att minimera omkretsen på staketet som delade triangeln i fyra lika stora delar. Det visade sig att J. Hall (en av deltagarna i tävlingen) hade lyckats få fram ett resultat som, om jag förstod det rätt, är det kortaste som hittills har hittats.

Ett stort tack Theducation AB och matematiska institutionen vid Stockholms universitet för att ni ordnar denna trevliga tävling!

## 2 Kul med polynom

I boken "New book of prime number records" av P. Ribenboim (som alla borde läsa) finner man följande polynom

$$p(x,y) = 2xy^4 + x^2y^3 - 2x^3y^2 - y^5 - x^4y + 2y \qquad (1)$$

Ett högst alldagligt polynom kan man tycka men det finns en mycket intressant anledning till att det finns med där. Det gäller nämligen att då $p(x,y)$ har definitionsmängden $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$, d.v.s. $x$ och $y$ antar alla icke-negativa heltalsvärden, så kommer de positiva värdena i värdemängden utgöra Fibonaccitalen! Det var ju inte precis vad man hade väntat sig. Kan detta verkligen stämma?

Låt oss beräkna ett par funktionsvärden.

| x/y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -69 | -476 | -1795 |
| 2 | -23 | -28 | 3 | -56 | -595 |
| 3 | -119 | -238 | -237 | -92 | 5 |
| 4 | -359 | -796 | -1077 | -1016 | -595 |
| 5 | -839 | -1918 | -2877 | -3356 | -3115 |

Tabell 1: Värdetabell för (1)

Vi ser att ett par Fibonaccital dyker upp $p(1,1) = 1$, $p(1,2) = 2$, $p(2,3) = 3$, $p(3,5) = 5$. Övriga värden är långt ifrån positiva. Vi noterar även att vi får fram Fibonaccitalen för just de värden på $x$ och $y$ som är Fibonaccital. Du kan själv gissa vad $p(5,8)$ är innan du beräknar det.

Det är frestande att ställa upp hypotesen

$$p(F_{n-1}, F_n) = F_n \qquad (2)$$

för Fibonaccital $F_n$, men det är bara frustrerande att göra det eftersom jag inte vet hur man visar att det stämmer. Jag ber att få återkomma på den punkten.

### 2.1 En formel för primtal

Nu är det riktigt festliga att det även finns formler som på samma sätt genererar primtal! Dessvärre är det inte en helt enkel formel att använda som vi skall se.

I samma bok finner man formeln

$$\begin{aligned}
&(k+2)\Big\{1-(wz+h+j-q)^2-((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2\\
&-(2n+p+q+z-e)^2-\left(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right)^2\\
&-\left(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\right)^2-\left((a^2-1)y^2+1-x^2\right)^2\\
&-\left(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\right)^2\\
&-\left(\left(\left(a+u^2(u^2-a)\right)^2-1\right)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\right)^2\\
&-(n+l+v-y)^2-\left((a^2-1)\,l^2+1-m^2\right)^2-(ai+k+1-l-i)^2\\
&-\left(p+l\,(a-n-1)+b\left(2an+2a-n^2-2n-2\right)-m\right)^2\\
&-\left(q+y(a-p-1)+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-x\right)^2\\
&-\left(z+pl(a-p)+t\left(2ap-p^2-1\right)-pm\right)^2\Big\}
\end{aligned}$$

Men här ser man något som kan få en att reagera: vi har en faktor $(k+2)$ i polynomet. Är det alltså värdet på $k+2$ som skall vara ett primtal? I så fall måste det andra uttrycket vara 1. Vi ser att det stora uttrycket består av 1 subtraherat med en massa kvadrater. Alltså gäller det att göra alla dessa kvadrater till 0. I hopp om att öka läsbarheten skriver jag om uttrycket som en lista över alla kvadrater som måste bli noll.

- $(wz+h+j-q)^2$
- $((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2$
- $(2n+p+q+z-e)^2$
- $\left(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right)^2$
- $(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2$
- $((a^2-1)y^2+1-x^2)^2$
- $(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2$
- $\left(\left((a+u^2(u^2-a))^2-1\right)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\right)^2$
- $(n+l+v-y)^2$
- $((a^2-1)l^2+1-m^2)^2$
- $(ai+k+1-l-i)^2$
- $\left(p+l(a-n-1)+b\left(2an+2a-n^2-2n-2\right)-m\right)^2$
- $\left(q+y(a-p-1)+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-x\right)^2$
- $\left(z+pl(a-p)+t\left(2ap-p^2-1\right)-pm\right)^2$

Var börjar vi då? Vi kan observera att $(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2=0$ leder till att $u$ måste vara udda. Låt t.ex. $u=1$. Det ger då villkoret $(16r^2y^4(a^2-1))^2=0$

Låt nu $r=0$ och $y=0$. Det förändrar kravlistan till

- $(wz+h+j-q)^2$
- $((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2$
- $(2n+p+q+z-e)^2$
- $\left(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right)^2$
- $(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2$
- $(1-x^2)^2$
- $\left(\left((a+(1-a))^2-1\right)n^2+1-(x+c)^2\right)^2$
- $(n+l+v)^2$
- $((a^2-1)l^2+1-m^2)^2$
- $(ai+k+1-l-i)^2$
- $\left(p+l(a-n-1)+b\left(2an+2a-n^2-2n-2\right)-m\right)^2$
- $\left(q+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-x\right)^2$
- $\left(z+pl(a-p)+t\left(2ap-p^2-1\right)-pm\right)^2$

Direkt ser vi att $n=l=v=0$ för att $(n+l+v)^2=0$ skall kunna uppfyllas. Det ger

- $(wz+h+j-q)^2$
- $((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2$
- $(p+q+z-e)^2$
- $\left(16(k+1)^3(k+2)+1-f^2\right)^2$
- $(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2$
- $(1-x^2)^2$
- $\left(1-(x+c)^2\right)^2$
- $(1-m^2)^2$
- $(ai+k+1-i)^2$
- $(p+b(2a-2)-m)^2$
- $\left(q+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-x\right)^2$
- $\left(z+t\left(2ap-p^2-1\right)-pm\right)^2$

Och $m=1$ och $x=1$ som ger

- $(wz+h+j-q)^2$
- $((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2$
- $(p+q+z-e)^2$
- $\left(16(k+1)^3(k+2)+1-f^2\right)^2$
- $(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2$
- $\left(1-(1+c)^2\right)^2$
- $(ai+k+1-i)^2$
- $(p+b(2a-2)-1)^2$
- $\left(q+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-1\right)^2$
- $\left(z+t\left(2ap-p^2-1\right)-p\right)^2$

Direkt får vi att $c=0$. I den ursprungliga formeln bestäms vårt primtal av uttrycket $(k+2)$ så om vi vill få fram primtalet 3 så måste $k=1$. Vi får därmed

- $(wz+h+j-q)^2$

- $((gk+2g+2)(h+j)+h-z)^2$
- $(p+q+z-e)^2$
- $\left(385-f^2\right)^2$

Vi kan sluta här. 385 är inget kvadrattal.

Om du istället för $r=y=0$ hade satt $a=1$ så kan jag lova dig att du kommer få bekymmer längre fram även här. Vid ett tillfälle fann jag att jag var tvungen att bestämma $e$ och $o$ så att

$$\left(4e^3(e+2)+1-o^2\right)^2$$

där $e \geq 482652$. Jag använde datorn men letandet gav inget. Någon analytisk lösning har jag ingen aning om hur jag skall kunna finna. Det slår mig dock att $4e^3(e+2) \approx \left(2e^2\right)^2 \approx o$. Kan det vara så att det går att visa att det finns med så mycket störande termer i uttrycket att vi inte får en kvadrat? Jag vet inte.

Jag tänker bespara läsaren dessa hemska uträkningar utan kan bara trösta med att säga att jag fann ekvationen $384(n+1)^2+1-f^2=0$ som gjorde att jag nu på allvar måste börja titta mer på diofantiska ekvationer.

## 2.2 Uttömmande sökning

Men om det nu är så att man verkligen kan finna heltalsvärden så att vi får fram primtal, borde man inte då kunna låta en dator testa alla tänkbara kombinationer av värden på variablerna? Jovisst går det (i teorin i alla fall), men låt oss se hur stor arbetsinsats det kommer bli.

Hur testar man alla värdena då? Uppenbarligen kan vi inte börja med $a=0,1,2,3,\ldots$ och först testa alla värden på $a$. De tar ju aldrig slut! Låt mig illustrera hur det går till ifall du har bara två variabler, $a$ och $b$. Tillvägagångssättet är inspirerat av Cantors sätt att visa att $\mathbb{Q}$ är uppräkningsbart.

Testa först alla möjligheter då summan av variablerna är 0, d.v.s.

$a=0$, $b=0$.

Därefter skall summan av variablerna vara 1, d.v.s.

$a=0$, $b=1$

$a=1$, $b=0$

Sedan skall summan av de båda variablerna vara 2. Då får vi fler möjligheter, men vi antager konventionen att alltid låta den första variabeln, $a$ (vi kan ordna dem i bokstavsordning) gå från 0 och uppåt för att samtidigt låta den andra variabeln få det värde som ger den bestämda summan. För summan 2 får vi

$a=0$, $b=2$

$a=1$, $b=1$

$a=2$, $b=0$

För summan 3 och så vidare kan du nog själv lista ut hur du skall göra. Hur många kombinationer blir det nu att testa?

Låt oss definiera $\sigma_n(s)$ som antalet variabeluppsättningar som måste testas ifall vi har $n$ stycken variabler som skall bilda summan $s$.

Med våra exempel ovan finner vi $\sigma_2(0)=1$, $\sigma_2(1)=2$, $\sigma_3(2)=3$. Om man vill bilda summan $s$ så kan den första variabeln antaga alla värden $0,1,2,\ldots,s$ d.v.s. $s+1$ stycken möjliga. Det innebär att

$$\sigma_2(s)=s+1 \tag{3}$$

För tre variabler $a,b,c$ gör vi på liknande sätt. Vi kan göra en liten tabell (tabell 2)

| summa | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 0 |

Tabell 2: Tabell över summering av tre variabler

Vi har $\sigma_3(0)=1$, $\sigma_3(1)=3$, $\sigma_3(2)=6$

Även här försöker vi ordna variablerna, naturligast är i bokstavsordning. Vi använder samma konvention och låter alltid första variabeln börja på 0 och sedan stiga upp mot summan. Om målet är att få summan $s$ och vi ger första variabeln värdet $x$ så kommer de två andra variablerna att behöva ge summan $s-x$. Det totala antalet kombinationer för att bilda summan $s$ blir därför

$$\sigma_3(s)=\sum_{x=0}^{s}\sigma_2(s-x)=\sum_{x=0}^{s}\sigma_2(x) \tag{4}$$

Sätt in (3) och vi får

$$\sigma_3(s)=\sum_{x=0}^{s}x+1$$

$$\sigma_3(s)=1+2+\ldots+s+1=\frac{(s+1)(s+2)}{2} \tag{5}$$

Med samma resonemang är det uppenbart att

$$\sigma_n(s)=\sum_{x=0}^{s}\sigma_{n-1}(x) \tag{6}$$

För skojs skull kan vi beräkna

$$\sigma_4(s)=\sum_{x=0}^{s}\sigma_3(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{s}(x+1)(x+2)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{s}\left(x^2+3x+2\right)=\frac{1}{6}s^3+s^2+\frac{11}{6}s+1$$

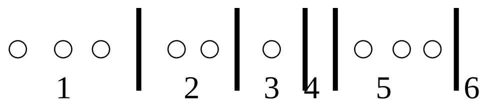
och fuskar man med Maple så finner man att vi får

$$\sigma_4(s)=\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{6} \tag{7}$$

Betraktar vi formlerna (5) och (7) så ser det ju onekligen intressant ut. Vi ställer upp en hypotes.

$$\sigma_n(s) = \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{(n-1)!} \tag{8}$$

Vi har redan visat den för $n = 1, 2, 3, 4$. Jag vill inte försöka visa den med hjälp av induktion, men om någon tror sig kunna göra det, gör det gärna och berätta hur! Istället tänkte jag använda kombinatorik. Vi har $n$ variabler och de skall summeras till $s$. Tänk dig att vi placerar ut $s$ stycken likadan kulor i en rad. Separera sedan kulorna med $n-1$ pinnar. Detta ger oss en indelning av de $s$ kulorna i $n$ delar och det motsvarar precis att bilda summan $s$ med $n$ variabler. Se figur 1.




Figur 1: Placering av $6-1=5$ pinnar bland 9 kulor. Observera hur vi i den fjärde gruppen inte får några kulor. Det får vi inte heller i den sjätte.

I figuren kan vi nu räkna ut på hur många sätt vi kan placera ut $n-1$ pinnar bland $s$ kulor. Vi kan tänka oss att vi har $n-1+s$ platser att placera något på ifall varje kul- och pinnposition utgör en plats att lägga något på. Vi skall då placera ut $n-1$ pinnar och det kan vi göra på $\binom{n-1+s}{n-1}$ olika sätt. Det gäller att

$$\binom{n-1+s}{n-1} = \frac{(n-1+s)!}{(n-1)!\cdot s!} = \frac{(n-1+s)\cdot\dots(s+2)(s+1)}{(n-1)!} \tag{9}$$

Detta uttryck är precis det vi ville visa enligt (8).

Betänker vi fallet med $n$ variabler och vi vill beräkna varje summa $s = 0, 1, 2, \dots, M$ där $M$ är ett stort tal, mycket större än $n$, hur många uppsättningar av variabelkombinationer blir det då vi testar? Vi kallar antalet $f(n, M)$ och

$$f(n,M) = \sum_{x=0}^{M} \sigma_n(M)$$

Denna summa har vi redan sett och vi vet att den är lika med $\sigma_{n+1}(M)$, d.v.s.

$$f(n,M) = \frac{(M+1)(M+2)\dots(M+n)}{n!}$$

Vi kan kontrollera att

$$f(3,2) = \frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

I tabell (2) ser vi att det faktiskt är 10 kombinationer vi skall testa.

I ett av mina försök att knäcka problemet med primtalspolynomet hade jag vid prövning behövt leta arbeta med $n = 26$ variabler och med summor $M > 482652$. För skojs skull kan vi få ytterligare bevis för hur hopplös denna metod är genom att beräkna

$$f(26, 482652) = \frac{482653\cdot 482654\cdot\dots\cdot 482678}{26!} \approx$$

$$\approx \left(\frac{482665}{18}\right)^{26} \approx 26814^{26} \approx 10^{115}$$

Detta stora antal kombinationer säger att prövning är uteslutet. En utväg (den enda?) är att minska antalet variabler och det finns faktiskt ett polynom med bara 10 variabler[1]. Dessvärre är gradtalet på det polynomet storleksordningen $10^{45}$ vilket gör det hela lika utsiktslöst.

# 3 Matematik i verkligheten

Det är ju på modet att hitta matematik i verkligheten så här kommer en dos.

En söndag, för ett tag sedan, ställde jag upp följande sats

**Sats 1.** Det finns ett USB-minne i min lägenhet.

Följande onsdag ändrades Sats 1 till att vara endast ett axiom.

**Axiom 1.** Det finns ett USB-minne i min lägenhet.

Nu har jag några frågor till dig som läser detta.

1. Hur försökte jag bevisa Sats 1?
2. Varför blev satsen bara ett axiom?
3. Finns det något sätt att formulera om Axiom 1 så att det blir en sats?

Så visst kan man ha nytta av matematisk terminologi i verkliga livet också.[2]

# 4 LMS

Det var föredrag i Lunds Matematiska Sällskap i torsdags och då höll Paul Vaderlind från Stockholm ett föredrag "Pärlor i kombinatorisk geometri". Det var intressant att få se många trevliga problem från geometrin. Många av dem var fortfarande öppna, men tiden räcker ju inte alltid till.

Ett enklare problem som Paul berättade om var följande (från den ryska matematiktävlingen för årskurs 6).

Antag att du färgar alla punkter på tallinjen i två färger, röd och blå. Visa att du alltid kan finna tre punkter $A, B, C$ med samma färg så att $|AB| = |BC|$.

Beviset var väldigt enkelt. Vi börjar med att hitta två punkter, $A$ och $B$, som har samma färg. Betrakta punkten som ligger precis mellan dem, kalla den $C$. Om den har samma färg som $A$ så är vi klara, annars väljer vi att titta på $D$ som ligger så att $|AB| = |BD|$. O+m den har en annan färg än $B$ så tittar vi på $E$ som ligger så att $|EA| = |AB|$. Om även $E$ har en annan färg än $A$ så gäller det att $E, C, D$ har samma färg och ligger så att $|EC| = |CD|$. Det var tre sådana punkter vi ville finna.

[1] Enligt wikipedia

[2] Jag lyckades upphöja axiom 1 till en bevisad sats på torsdagen.