Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar @ taljaren. se

november 2007

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till alla intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 Procent — igen

I Helsingborgs Dagblad publicerades tydligen en uppgift som löd så här:

> *En melon väger 2 kilo och innehåller 99% vatten. Melonen får ligga i solen och därmed sjunker vattenhalten till 98%. Hur mycket väger melonen nu?*

Enligt http://hd.se/landskrona/2007/10/14/klurig-matteuppgift-foerklaras-av/ har det varit många som har brottats med uppgiften. Åter är det känslan av orimlighet som är så slående. Hur kan svaret vara att den bara väger 1 kg? Hur kan 1 procentenhet (inte procent) motsvara halva vikten?

Åter är svaret: procent uttrycker hur stor del något utgör av det hela. Det som inte är vatten väger 20g eftersom 1% av 2 kg är just 20g. När den har torkat motsvarar 20g 2% av vikten, d.v.s. vikten är 1 kg. Man kan notera att icke-vattnet utgör 1% till en början, för att sedan öka till 2% av vikten, d.v.s. en fördubbling. Vill man kan man tänka på det som att om du spär ut väldigt lite i väldigt mycket vatten, så måste du minska mängden vatten väldigt mycket för att kunna fördubbla koncentrationen av det som inte är vatten.

Så slutsatsen är: tag alltid procenttal med en nypa salt tills du förstår vad de står för.

2 Betygens betydelse

Högskoleverket har kommit med en rapport *Samband mellan betyg i gymnasieskolan och prestationer i högskolan* som finns att ladda ner från http://www.hsv.se (2007 21:R).

De har sett ett starkt samband mellan betygen i matematik och fysik och prestationerna på civilingenjörsprogrammet samt mellan betygen i svenska och samhällskunskap och prestationerna på juristprogrammet. Med framgång på högskolan avsees hur många poäng de får. Det fanns även en större skillnad mellan dem som fått G och VG än mellan dem som fått VG och MVG i gymnasiet. Är det betygsinflationen som man ser tecken på?

3 κappa 2007

Matematiktävlingen för lärare, κappa 2007, har nu nått fram till sista frågan. Här presenterar jag mitt svar, som jag på inget sätt vill framhålla som kort eller elegant eller ens korrekt. Jag kan tillägga att tiden har gått ut och att jag som sämst kan komma på plats 15 (eftersom bara 15 har lämnat in svar).

3.1 Frågan

På $\mathbf{R}^4$ definieras en produkt * på följande sätt:

$$(a,b,c,d)*(a',b',c',d') =$$
$$(cd'-c'd, ac'-a'c+cb'-c'b, a'd-ad'+bd'-b'd, c'd-cd')$$

eller mer läsligt uttryckt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cd'-c'd \\ ac'-a'c+cb'-c'b \\ a'd-ad'+bd'-b'd \\ c'd-cd' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Bestäm samtliga delmängder S av $\mathbf{R}^4$ som uppfyller följande två villkor:

1. $x, y \in S$ och $a, b \in \mathbf{R}$ medför $ax+by \in S$
2. $x \in S$ och $y \in \mathbf{R}^4$ medför $x*y \in S$

3.2 Svaret

3.2.1 Kort svar

Det finns fyra olika delmängder
$S = \mathbf{R}^4$, $\{0\}$, $\{(x,y,z,-x) \,|\, x,y,z \in \mathbf{R}\}$, $\{(x,x,0,0) \,|\, x \in \mathbf{R}\}$

3.2.2 Långt svar

Villkor 1 ger för $a=b=0$ att $0 \in S$ för alla mängder S. Vi finner direkt att de två triviala mängderna $\{0\}$ och $\mathbf{R}^4$ uppfyller villkoren. $\mathbf{R}^4$ gör det eftersom den innehåller hela rummet vi arbetar i och $\{0\}$ eftersom $0+0=0$ och produkten alltid blir 0 om minst en av de två operanderna för produkten är 0.

Villkor 1 säger oss att mängden S utgör ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^4$ och vi vet att ett sådant underrum spänns upp av en, två eller tre basvektorer som alla är skilda från nollvektorn. Fallet med noll respektive fyra basvektorer utgör $\{0\}$ respektive hela $\mathbf{R}^4$.

Jag kommer att behandla de olika dimensionsfallen separat och använda villkor 2 för speciellt valda vektorer y för att genom beräknande av produkten få fram det resultat jag behöver.

3.2.3 $\dim S = 1$

Antag att $\dim S = 1$ och att vi har basvektorn $(a,b,c,d) \neq 0$. Vi får
$$(a,b,c,d) * (1,0,0,0) = (0,-c,d,0)$$
Enligt villkor 2 skall då $(0,-c,d,0) \in S$ och alltså gäller
$$(0,-c,d,0) = \lambda(a,b,c,d)$$
för något tal λ. Detta ger oss två möjligheter. Antingen är $\lambda = 0$ eller $\lambda \neq 0$. I fallet med $\lambda \neq 0$ får vi direkt genom att jämföra komponentvis att $a = 0$ och $d = 0$. Detta leder genom komponentvis jämförelse till att $c = 0$ som leder till att $b = 0$. Detta strider mot att $(a,b,c,d) \neq 0$. Alltså kan inte $\lambda \neq 0$.

I fallet med $\lambda = 0$ får vi att $c = d = 0$. Vi beräknar därför
$$(a,b,0,0) * (0,0,0,1) = (0,0,b-a,0)$$
Om denna vektor skall vara en multipel av $(a,b,0,0)$ så måste $a = b$. Det innebär att om S spänns upp av en enda vektor så har vi basvektorn $(1,1,0,0)$.

För att visa att rummet som spänns upp av denna vektor verkligen uppfyller villkor 2 konstaterar vi att
$$(a,a,0,0) * (A,B,C,D) = (0,0,0,0) \in S$$
för alla värden på $a,A,B,C,D \in \mathbf{R}$.

3.2.4 $\dim S = 3$

Nu skall vi använda en egenskap i produkten. Vi observerar att första komponenten, i en produkt av två element, är densamma som fjärde komponenten med ombytt tecken. Detta ger oss att varje element z vi får fram som en produkt $z = x * y$ där $x \in S$ och $y \in \mathbf{R}^4$ har krav på sig att vara antingen 0 eller $z = (z_1, z_2, z_3, -z_1)$. Vår mängd S måste alltså vara fylld med vektorer på denna form. Den fjärde komponenten är alltså "ointressant" och vi kan betrakta det som att vi skall bestämma ett tredimensionellt rum med tre basvektorer. Vi kan välja vilka basvektorer vi vill, men enklast är att välja $(1,0,0,-1)$, $(0,1,0,0)$ och $(0,0,1,0)$ som ger oss den fjärde komponenten på enklaste sätt.

Vi kan välja en annan bas så länge som den basen ger oss samma mängd.

3.2.5 $\dim S = 2$

I det tvådimensionella fallet vill vi bestäma en liknande mängd där första och fjärde komponenten är beroende av varandra. Vi får ett antal möjliga basvektorer som kan skapa våra element. Jag har reducerat baserna till det allra enklaste tänkbara.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vi har alltid första komponenten lika med noll).

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $a \in \mathbf{R}$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $b \neq 0$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $ab \neq 0$

Nu skall jag visa att ingen av dessa fyra baser ger oss någon fungerande mängd S. Jag gör det genom att visa att det går att bilda linjärkombinationer av basvektorerna som ger oss produkter som *inte* ligger i S.

1. Bilda vektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi beräknar produkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Detta element kan inte bildas med de föreslagna basvektorerna.

2. Bilda vektorn $\begin{pmatrix} 4 \\ 4a \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ och beräkna $\begin{pmatrix} 4 \\ 4a \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. För att bilda denna vektor måste vi ha $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ för några värden på x och y. Det är uppenbarligen omöjligt.

3. Bilda vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ och beräkna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Denna vektor kan vi omöjligen få fram genom att bilda en linjärkombination av $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Bilda vektorn $\begin{pmatrix} 4 \\ 4a+5b \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ och beräkna

$\begin{pmatrix}4\\4a+5b\\5\\-4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\\-4\\0\end{pmatrix}$. Denna vektor kan vi ej bilda som linjärkombination av vektorerna $\begin{pmatrix}1\\a\\0\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\b\\1\\0\end{pmatrix}$ såvida vi inte sätter $b=\frac{5}{4}$. Men detta ger oss ett krav på basvektorn som gör att vi hamnar utanför rummet om vi betraktar vektorn $3\begin{pmatrix}1\\a\\0\\-1\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{4}\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3a+20\\16\\-3\end{pmatrix}$ som multiplicerad med $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ger $\begin{pmatrix}0\\16\\-3\\0\end{pmatrix}$ som inte är en linjärkombination av $\begin{pmatrix}1\\a\\0\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{4}\\1\\0\end{pmatrix}$.

Vi kan alltså inte ha ett underrum S med två basvektorer.

3.3 Extra frågan

Fyra mycket snåla systrar har fått ärva en kolonilott. Lotten har formen av en triangel där alla sidor är tjugo meter. Systrarna är överens om att dela kostnaderna för ett staket som delar in lotten i fyra till arean lika stora delar och dom vill ha din hjälp med indelningen. Sätter upp det gör dom själva. Hur kort kan du kan du göra ett sådant staket? Staketet kan vara krokigt. Beskriv formen på staketet och ange längden med tre decimaler. Du behöver inte bevisa att ditt svar är optimalt, men om du gör det är det förstås en bonus.

3.4 Extra svaret

Jag börjar med att berätta att jag inte har bevisat att det finns någon kortaste längd eller mitt svar är den kortaste längden. Min lösning går ut på att testa olika fall.

3.4.1 Kort svar

Det kortaste staketet jag fann har längden 26,365 m (exklusive 60 m som krävs för att hägna in hela triangelns kant). Formen visas i figur 4 och i denna figur skall höjden H vara 8.321809652... för att minimum skall uppnås.

3.4.2 Långt svar

Först en observation. Jag räknar inte med de 60 m staket som skall omgärda hela tomten eftersom denna extra sträcka är densamma för alla möjliga former på staketet. Vill man kan man lätt addera 60 till mitt svar. Jag kallar den kortaste längden av staketet som åtgår för L.

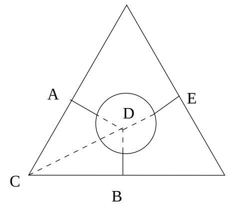
Arean för hela det triangelformade området är

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20\cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{3}$$

så varje del av marken skall ha arean $A=25\sqrt{3}$.

En grov övre gräns är $L=30$ som erhålls genom att dra tre parallelltransversaler i triangeln som delar sidorna mitt itu.

En annan variant är att skapa ett cirkel med arean A, d.v.s. med radien $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}=\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}\approx 3{,}7$, så som i figur 1.



Figur 1: *En variant. Notera att CE är en rak linje genom triangelns tyngdpunkt D även om det inte ser ut så. Cirkelns radie är* $r=\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}$. *$A,B,E$ är mittpunkterna på respektive sida.*

Vi vet att $DB=10\tan 30^\circ=\frac{10}{\sqrt{3}}$ vilket ger att längden av de små bitarna som går från cirkelns periferi till punkterna A,B,E är $\frac{10}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}$. Denna variant ger då en omkrets på

$$3\left(\frac{10}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}\right)+2\pi\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}=$$

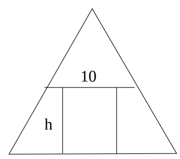
$$10\sqrt{3}-15\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}+10\sqrt{\pi\sqrt{3}}\approx 29{,}510$$

Detta är mindre än 30. Vi kan även observera att cirkelns omkrets är

$$2\pi\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{\pi}}\approx 23{,}327$$

vilket gör att varje försök med att innesluta arean med en figur i det inre av triangeln (utan mer kontakt än eventuellt en tangeringspunkt med någon sida) kräver, enligt isoperimetriska olikheten $L>23{,}327$. Dessutom är avståndet från cirkeln till sidorna det minsta möjliga då cirkeln ligger mitt i triangeln. Att t.ex. flytta cirkeln uppåt skulle leda till att sträckorna som går till punkterna A och E skulle bli längre. Det blir även den sträcka som går till B.

Härnäst försöker vi med figur 2. I denna gäller att $h=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.



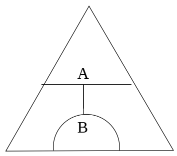
Figur 2: *Vi testar med fler raka streck. Längden blir då* $10+2h$

Det ger $L=10+2\cdot 5\sqrt{3}=10+10\sqrt{3}\approx 27{,}321$. Detta var alltså en kortare variant än att innesluta ett område som vi gjorde i förra försöket. Längden $L=10+10\sqrt{3}$

Vi kan enkelt observera att om något av de i figuren lodräta strecken skulle vara icke-lodrät, men fortfarande ha sina ändpunkter i triangelns bas respektive på parallelltransversalen, så skulle det bidra till ökad längd.

På samma sätt skulle en förflyttning av ändpunkten från parallelltransversalen leda till att vi ökar längden. Jämför med det allra första fallet med längden 30. Skulle vi flytta ändpunkten ut på triangelns sida skulle längden bli ännu längre för att täcka samma area.

Vi har även denna möjlighet (Figur 3)



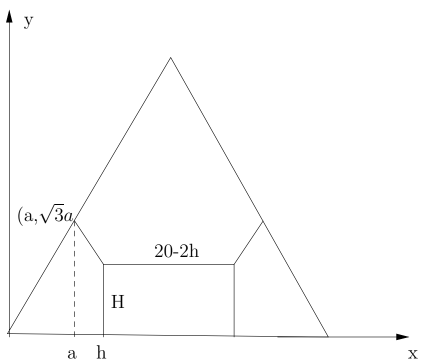
Figur 3: *Vi drar en parallelltransversal samt en halvcirkel och ett streck AB.*

Vi finner att cirkeln får radien $r = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\sqrt{3}}{\pi}} = \sqrt{\frac{50\sqrt{3}}{\pi}} \approx$ 5,2504 vilket ger omkretsen

$$\pi r = \sqrt{50\pi\sqrt{3}} \approx 16{,}495$$

Sträckan AB kan då inte vara längre än ca $\approx 27 - (16+10) = 1$ men $AB = 5\sqrt{3} - r \approx 3$.

Det finns dock en kortare lösning. Se figur 4.



Figur 4: *Vi lägger in en rektangulär yta samt drar linjer från hörnen till triangelns övriga sidor.*

I denna triangel, som vi har placerat i ett koordinatsystem, gäller att höjden H på rektangeln bestämmer allt. Det gäller att om $A = 25\sqrt{3}$ så är

$$H(20 - 2h) = A \Rightarrow h = 10 - \frac{A}{2H} \tag{2}$$

Vidare får vi att arean för området som utgår från koordinatsystemets origo är

$$\frac{\sqrt{3}a \cdot a}{2} + \frac{\sqrt{3}a + H}{2}(h - a) = A$$

som ger

$$a = \frac{5A - 20H}{20\sqrt{3} - \frac{75}{H} - 2H} \tag{3}$$

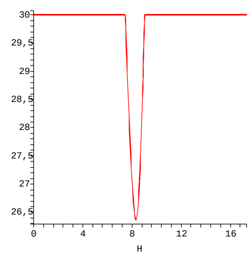
Längden kan nu skrivas som

$$L(H) = 2H + 20 - 2h + 2\sqrt{(h-a)^2 + \left(\sqrt{3}a - H\right)^2}$$

Funktionen är definierad för $0 < H < 10\sqrt{3}$ med undantag för punkter där nämnaren blir 0. Hade jag haft mer tid hade jag försökt arbeta vidare exakt men jag blev tvungen att använda Maple[1]. Jag gav följande kommandon

```
A:=25*sqrt(3);
h:=H->10-A/2/H;
a:=H->(5*A-20*H)/(20*sqrt(3)-75/H-2*H);
L:=H->2*H+20-2*h(H)+2*sqrt((h(H)-a(H))^2+
        (sqrt(3)*a(H)-H)^2);
plot(min(30,L(H)),H=0..10*sqrt(3));
L(sqrt(3)*5);  # Detta gav mig svaret
    #10+10*sqrt(3) vilket var väntat, se ovan.
minimize(L(H),H=0..10*sqrt(3),location=true);
evalf(%);
```

Dessa kommandon gav mig resultatet L =26,36485524 för H =8.321809652. Här visar jag grafen som plottades.



Svar: Det kortaste staketet jag fann har längden 26,365m.

4 Kul med primtal

Från boken "Prime numbers" av David Wells måste jag ta upp två saker. Först det faktum att polynomet $p(n) = 30n - 13$ producerar 411 primtal då $n = 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Här borde man kunna formulera en uppgift som rör sannolikheten att få fram primtal för olika värden på n. Det får bli en övning till läsaren.

4.1 Uppvärmning med summor

Som inledning till det följande vill jag ta upp summor över flera variabler. Betrakta

$$\sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{M} ab$$

Vad kan vi säga om detta uttryck? Vad betyder det? Det betyder att vi skall summera, för varje värde på a från 1 till N, för varje värde på b från 1 till M, värdet av uttrycket $a \cdot b$. Låt oss ta ett exempel. Låt $N = 2$ och $M = 4$. Vi får då

$$\sum_{a=1}^{2} \sum_{b=1}^{4} ab$$

[1] Uttrycken blir ändå inte speciellt enkla att jobba med.

Vi skall summera för $a=1$ och $a=2$. Om $a=1$ får vi

$$\sum_{b=1}^{4} 1\cdot b = 1+2+3+4$$

och för $a=2$ får vi

$$\sum_{b=1}^{4} 2\cdot b = 2+4+6+8$$

eller om vi vill uttrycka det längre,

$$2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4 = 2(1+2+3+4)$$

Det vi gör är att vi summerar $\sum_{b=1}^{4} b$ och sedan multiplicerar med värdet på a (som här var 2). Vi har alltså

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{4} ab = \sum_{a=1}^{2}\left(a\cdot\sum_{b=1}^{4} b\right)$$

som vi kan skriva

$$=\sum_{a=1}^{2} a\cdot\left(\sum_{b=1}^{4} b\right) = \left(\sum_{a=1}^{2} a\right)\cdot\left(\sum_{b=1}^{4} b\right)$$

För att förstå den sista likheten kan du tänka dig $\sum_{b=1}^{4} b$ som en konstant B. Du summerar då $\sum_{a=1}^{2} a\cdot B$ som kan skrivas $\left(\sum_{a=1}^{2} a\right)B$. Vi har även.

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{4} ab = \left(\sum_{b=1}^{4} b\right)\cdot\left(\sum_{a=1}^{2} a\right)$$

Denna summa kunde vi alltså ha beräknat i en annan ordning genom att börja sumera för varje värde på b. Allt detta lyckas tack vare att summornas gränser och summationsvariabler är oberoende av varandra, likaså är uttrycket ab en produkt där vi kan bryta ut faktorer som bara beror på en summationsvariabel.

När du ser ett uttryck som

$$\sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{4} ab$$

så skall du tänka att i den “inre” summan $\sum_{b=1}^{4} ab$ så händer inget med värdet a. Det kan flyttas ut till $a\cdot\sum_{b=1}^{4} b$. Vi ser även att i summan $\sum_{a=1}^{2} a\cdot\sum_{b=1}^{4} b$ är den inre summan $\sum_{b=1}^{4} b$ helt oberoende av b. Vi beräknar alltså summorna var för sig och multiplicerar dem.

Har vi ett uttryck såsom

$$\sum_{a_1=1}^{N_1}\sum_{a_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{a_m=1}^{N_m} a_1a_2\ldots a_m$$

så inser vi att vi kan skriva det som en produkt av enskilda summor.

$$\left(\sum_{a_1=1}^{N_1} a_1\right)\left(\sum_{a_2=1}^{N_2} a_2\right)\cdots\left(\sum_{a_m=1}^{N_m} a_m\right)$$

Detta är kärnan i hela resonemanget.

Som övning kan du övertyga dig om att

$$\sum_{a_1=1}^{N_1}\sum_{a_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{a_m=1}^{N_m} f_1(a_1)f_2(a_2)\ldots f_m(a_m) =$$

$$\left(\sum_{a_1=1}^{N_1} f_1(a_1)\right)\left(\sum_{a_2=1}^{N_2} f_2(a_2)\right)\cdots\left(\sum_{a_m=1}^{N_m} f_m(a_m)\right)$$

för funktioner $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

4.2 Liouville

Det desto intressantare från boken är ett resultat av Joseph Liouville (1809-1882) som jag först tänkte illustrera med ett exempel.

Talet 20 har följande delare, 1, 2, 4, 5, 10, 20. Varje delare har i sin tur delare; vi har

Tal	Delare	Antal delare
1	1	1
2	1,2	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
10	1,2,5,10	4
20	1,2,4,5,10,20	6

Observationen som Liouville gjorde (och tydligen bevisade generellt) var att

$$(1+2+3+2+4+6)^2 = 1^3+2^3+3^3+2^3+4^3+6^3 \quad (4)$$

I båda leden får vi 324. Detta är dock ingen tillfällighet.

Med ett mer matematiskt skrivsätt handlar det om att för varje delare k till n skall vi studera antalet delare till dessa tal k. Antalet delare till ett tal k skrivs $\tau(k)$. Vänsterledet i 4 kan då skrivas

$$(\tau(1)+\tau(2)+\tau(4)+\tau(5)+\tau(10)+\tau(20))^2$$

eller mer allmänt för varje k som delar n;

$$\left(\sum_{k|n}\tau(k)\right)^2$$

I högerledet har vi

$$\tau(1)^3+\tau(2)^3+\tau(4)^3+\tau(5)^3+\tau(10)^3+\tau(20)^3$$

eller mer allmänt

$$\sum_{k|n}\tau(k)^3$$

Vi vill nu visa att

$$\left(\sum_{k|n}\tau(k)\right)^2 = \sum_{k|n}\tau(k)^3 \quad (5)$$

Frågan är nu, vad är $\tau(k)$? Som jag nog nämnde i förra numret är $\tau(k)$ en multiplikativ funktion och då gäller att om $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}$ att

$$\tau\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_m^{\alpha_m}\right) = \tau(p_1^{\alpha_1})\tau(p_2^{\alpha_2})\ldots\tau(p_m^{\alpha_m}) \quad (6)$$

Vi konstaterade att för primtal p gäller

$$\tau(p^\alpha) = (\alpha+1)$$

så

$$\tau\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}\right) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_m+1)$$

Om vi nu antager att $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ så kommer varje delare k till n skrivas på formen

$$k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}, \;\; 0 \le \beta_i \le \alpha_i, \;\; 1 \le i \le m$$

Högerledet i (5) kan då skrivas

$$\sum_{k|n} \tau(k)^3 = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \tau\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}\right)^3 =$$

och med (6) får vi

$$= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \left(\tau(p_1^{\beta_1})\tau(p_2^{\beta_2})\dots\tau(p_m^{\beta_m})\right)^3 =$$

och med våra tidigare resultat kan vi skriva detta

$$= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \tau(p_1^{\beta_1})^3 \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \tau(p_2^{\beta_2})^3 \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \tau(p_m^{\beta_m})^3 =$$

$$= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} (\beta_1+1)^3 \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} (\beta_2+1)^3 \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} (\beta_m+1)^3 \qquad (7)$$

Vänsterledet i (5) kan vi nu skriva

$$\left(\sum_{k|n} \tau(k)\right)^2 = \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \tau\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}\right)\right)^2 =$$

$$\left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \tau(p_1^{\beta_1}) \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \tau(p_2^{\beta_2}) \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \tau(p_m^{\beta_m})\right)^2 =$$

$$\left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} (\beta_1+1) \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} (\beta_2+1) \dots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} (\beta_m+1)\right)^2 =$$

$$\left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} (\beta_1+1)\right)^2 \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} (\beta_2+1)\right)^2 \dots \left(\sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} (\beta_m+1)\right)^2$$

och detta uttryck är lika med 7 eftersom

$$\left(\sum_{\beta=0}^{\alpha} \beta\right)^2 = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right)^2 = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \beta^3$$

Den sista likheten utgår jag från att du kan sedan tidigare. Annars visar du den lätt med induktion.

Därmed har vi visat samma sak som Lioville visade för över hundra år sedan.

5 Dåliga nyheter

Enligt skolverket[2] så har antalet elever som läser kursen Matematik E minskat åter igen. Våren 1999 var det ca 19% som läste den, år 2002 16% och år 2006 enbart 10%.

Illa värre! De vet inte vad för roligt de går miste om!

[2] http://www.skolverket.se/sb/d/203/a/10229