Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

oktober 2007

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till alla intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 $\tau(72)$

Idag fick jag en fråga från en kollega som heter Bert. Den ursprungliga frågan gick ut på att bestämma på hur många olika sätt man kan fylla en skiva, som rymmer 72 minuter ljud, med låtar med lika lång längd (ett helt antal minuter) Vi diskuterade saken och en snabb koll visar att vi har 12 möjligheter, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Det hela kokar ner till att bestämma på hur många olika sätt vi kan välja ut primtal ur faktoriseringen av talet 72. Som bekant är $72 = 2^3 \cdot 3^2$ och vi har alltså tre stycken 2:or och två stycken 3:or.

Här kan vi nu definiera en funktion

$$\tau(n) = \text{antal olika positiva delare till } n$$

T.ex. har talet 72 tolv delare vilket alltså innebär $\tau(72) = 12$. Hur fungerar denna funktion då? Vi kan börja med att observera att för ett primtal p gäller att $\tau(p) = 2$ eftersom p bara har delarna 1 och p. För en potens av primtal gäller att $\tau(p^k) = k+1$. Detta inses lätt eftersom vi har delarna $\underbrace{1, p^1, p^2, \ldots, p^k}_{k+1 \text{ stycken}}$.

Nu är inte 72 något primtal, så hur gör vi då med fallet $\tau(n)$ där n inte är ett primtal?

Betrakta fallet med $\tau(p^n q^m)$ där p och q är två olika primtal. För att få en delare till talet $p^n q^m$ väljer vi ett antal p och sedan ett antal q; dessa val är oberoende av varandra eftersom p och q är olika primtal. Vi kan göra valet av p:na på $n+1$ olika sätt ($= \tau(p^n)$) och valet av q:na på $m+1$ olika sätt ($= \tau(q^m)$). Det totala antalet val blir därmed $(n+1)(m+1)$. Ur detta drar vi slutsatsen att

$$\tau(p^n q^m) = \tau(p^n) \cdot \tau(q^m)$$

då p och q är relativt prima. Det är detta som kännetecknar en så kallad *multiplikativ funktion* inom talteorin. Med detta är det lätt att komma till resultatet att för ett tal x som faktoriseras i primtal som

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

där alla p_i är olika primtal, gäller

$$\tau(x) = \tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$$

Återgår vi till fallet med $\tau(72)$ så gäller alltså

$$\tau(72) = \tau(2^3 \cdot 3^2) = (3+1)(2+1) = 12$$

Denna funktion stöter du på i all inledande talteori.

1.1 $72 = 2^3 \cdot 3^2$

Man kan observera att $72 = 2^3 \cdot 3^2$ och symmetrin i uttrycket $2^3 \cdot 3^2$ ser ju onekligen intressant ut. Man kan även läsa på t.ex. wikipedia om Mihăilescus teorem (eller Catalans förmodan som den var känd som innan den bevisades 2002) som säger att den enda lösningen till den (Catalanska) diofantiska ekvationen

$$x^p - y^q = 1$$

är just

$$3^2 - 2^3 = 1$$

Bortsett från den triviala $1^1 - 0^1$. Annorlunda uttryckt säger satsen att de enda konsekutiva potenserna är 8 och 9. Jag kan tipsa om `http://www.math.leidenuniv.nl/~jdaems/scriptie/Catalan.pdf` som innehåller bevis för satsen. Det kräver dock en del förkunskaper, men vissa delar borde ändå vara greppbart.

2 Ett fallande ägg

På internet såg jag en videosnutt från Japan som visade hur ett ägg föll från 22m höjd. Fallet bromsades upp genom att man placera ett 2 cm tjockt material på marken. Ägget höll! Det är en rejäl inbromsning. Hastigheten med vilken ägget träffar underlaget på marken är $v = \sqrt{22 \cdot 9{,}82 \cdot 2} \approx 20{,}8$ m/s, d.v.s. nära 75 km/h! Med en bromssträcka på högst 2 cm, med en genomsnittlig inbromsningsretardationen a m/s^2 och om tiden för inbromsningen är T s får vi sambanden

$$0{,}02 = \frac{1}{2}aT^2 \quad 20{,}8 - aT = 0$$

som ger $0{,}02a = \frac{1}{2}(20{,}8)^2$ och $a = 10816$ m/s^2.

Jag har svårt att få rimlighetsanalysen att gå ihop.

3 Lunds matematiska sällskap

LMS håller tre möten nu i höst. Dessa är

- *Manifestations of Fubini's Nightmare* som hålls den den 3 oktober av Jörg Schmeling, Matematik LTH

- *The stability of planetary systems* den 7 november av Melvyn B. Davies, Astronomi, Lunds universitet
- *Pärlor i kombinatorisk geometri* den 6 december Paul Vaderlind, Stockholm

För mer information om föredragen, besök http://www.matematik.lu.se/LMS/.

4 κappa 2007

Matematiktävlingen för lärare, κappa 2007 har nu nått fram till sista frågan. Jag repeterar fråga 4 och presenterar sedan mitt svar som jag på inget sätt vill framhålla som kort och elegant. Därefter kommer fråga 5.

4.1 Fråga 4

1. En kompositör i paradiset vill komponera melodier för sitt piano som är oändligt utsträckt åt båda hållen och bara har vita tangenter. Hennes melodier skall ha egenskapen att efter en ton kommer antingen tonen närmast högre eller närmast lägre. Hur många melodier kan hon komponera som består av n toner, om alla melodierna skall börja i en viss tangent och sluta med tangenten som befinner sig k steg åt höger på pianot?
2. En annan kompositör som befinner sig i skärselden har ett piano som bara utsträcker sig oändligt till höger (och har en vägg till vänster). Han vill komponera melodier på samma sätt som sin kollega i paradiset. Hur många melodier kan han komponera som består av n toner och som alla börjar med tangenten längst till vänster och som slutar med tangenten som har nummer k från vänster (tangenten längst till vänster har nummer 1).
3. En tredje stackars kompositör befinner sig i helvetet. Där har pianot bara 6 tangenter. Hur många melodier som består av 30 toner kan komponeras om man följer samma regel som kollegerna ovan och om alla melodierna börjar på den första tangenten och slutar på den fjärde tangenten?

4.2 Svar fråga 4

4.2.1 Del 1

Vi startar alltid på tangent 1, så egentligen är uppgiften att gå $n-1$ steg, åt höger eller vänster, så att vi totalt sett går k fler steg åt höger än åt vänster.

Vi kan därför tänka oss att vi har $n-1$ förflyttningar och $\frac{n-1+k}{2}$ skall vara åt höger medan $\frac{n-1-k}{2}$ skall vara åt vänster. Vi frågar oss därför: på hur många sätt kan vi välja ut $\frac{n-1+k}{2}$ platser av de $n-1$ där vi skall placera högerförflyttningarna?

Detta kan vi göra på

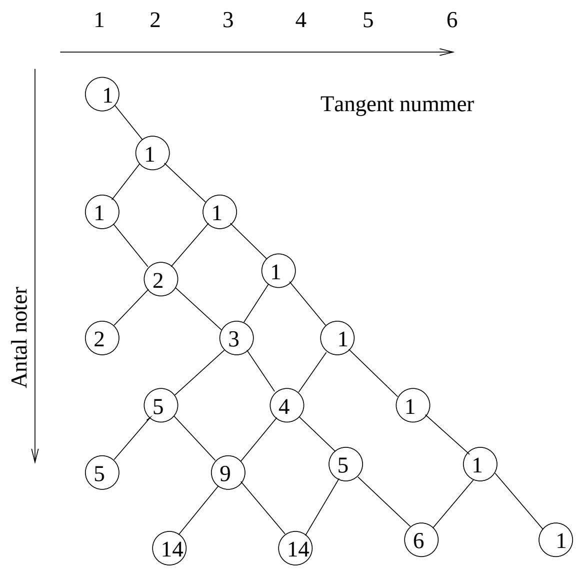
$$\binom{n-1}{\frac{n-1+k}{2}}$$

sätt. Vi observerar även att detta går endast att göra då $\frac{n-1+k}{2}$ är ett heltal, d.v.s. $n+k$ är ett udda tal. Om $n+k$ är jämnt så är antalet sätt 0; det går alltså inte alls.

Svar: Antalet sätt är $\binom{n-1}{\frac{n-1-k}{2}}$ då $n-k \equiv 1 \bmod 2$; 0 annars.

4.2.2 Del 2

Här har vi samma problem, men vi har begränsningen att vi får aldrig gå till vänster om vår startposition. Initialt kan man rita upp följande träd för att visa hur antalet sätt att nå en viss position växer med antalet steg vi tar. Se figur (1).



Figur 1: Trädet beskriver hur vi (i roten) kan komma till första positionen på ett sätt. Därifrån når vi den andra på ett sätt. Från den andra positionen når vi sedan antingen den första (på ett sätt) eller den tredje på ett sätt. I det fjärde steget kan vi sedan antingen nå den fjärde positionen på ett sätt, eller nå den andra positionen på 2 sätt.
I princip kommer vi att addera de två siffror som står ovanför en nod i trädet och på detta sätt erhålla antalet sätt. T.ex. kan vi hamna på 3:e positionen efter 7 noter på 9 olika sätt.

Direkt känner man iver att ställa upp en rekursionsformel liknande denna

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k+1) \qquad (1)$$

där $f(n,k)$ är antalet sätt att nå position k på n steg. Den vägen visade sig vara mig övermäktig. I stället roterade och speglade jag trädet och fick fram en ny struktur på trädet, se tabell 1.

Observera hur antalet steg åt vänster alltid börjar på 0, medan för stegen åt höger får stegen alltid ett värde. Man upptäcker snart mönstret med att addera talet till vänster och talet under för att bilda ett av talen i tabellen.

Låt oss kalla koefficienterna i tabell 1 för $f(n,k)$ där n är antalet steg åt höger och k är antalet steg åt vänster (uppåt i tabellen). Målet är nu att bestämma en genererande funktion $h(x,y)$ sådan att den kan skrivas som en summa

$$h(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(n,k)x^n y^k \qquad (2)$$

Här låter vi n gå från 0, så vi får lägga till det i vår tabell. bDet ger oss tabell

5							42
4						14	42
3					5	14	28
2				2	5	9	14
1			1	2	3	4	5
0		1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6

Tabell 1: Trädet har blivit roterat och i horisontalled har vi antalet steg åt höger och i i vertikalled antalet steg åt vänster. Vi ser att antalet sätt att gå 5 steg åt höger och 2 åt vänster är 9.

5							42
4						14	42
3					5	14	28
2				2	5	9	14
1			1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6

Tabell 2: Vi lägger till kolumnen för $n = 0$.

Om ekvation (1) skall gälla så kan vi arbeta baklänges för att fylla i alla luckor i tabellen. I och för sig så är det orimligt (för vårt problem) att gå fler steg åt vänster än åt höger, men låt oss bortse från det för ett ögonblick. Vi inser t.ex. att för $n = 3$ och $k = 3$ måste vi ha $f(3,3) = 0$ ty annars skulle inte $f(4,3) = 5$. Vi fyller på med 0:or längs diagonalen. Därefter kan vi lika gärna fortsätta och fylla i hela tabellen. Resultatet är som visas i tabell 3.

5	-1	-4	-9	-14	-14	0	42
4	-1	-3	-5	-5	0	14	42
3	-1	-2	-2	0	5	14	28
2	-1	-1	0	2	5	9	14
1	-1	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6

Tabell 3: Trädet har blivit roterat och i horisontalled har vi antalet steg åt höger och i i vertikalled antalet steg åt vänster. Vi ser att antalet sätt att gå 5 steg åt höger och 2 åt vänster är 9. Notera alla de negativa värdena och symmetrin (bortsett från tecknet).

Ur tabellen ser vi att (1) fortfarande gäller, dock med villkoren $f(0,0) = 0$, $f(0,k) = -1$ för $k > 0$ samt $f(n,0) = 1$ för $n > 0$. Utgår vi från $f(n,k) = f(n,k-1) + f(n-1,k)$ och multiplicerar med x^n och summerar för alla $n \geq 1$ får vi

$$\sum_{n=1} f(n,k)x^n = \sum_{n=1} f(n,k-1)x^n + \sum_{n=1} f(n-1,k)x^n$$

Med tillägg för termen som motsvarar $n = 0$ samt utbrytning av ett x i sista termen samt en skiftning av indexen får vi

$$\sum_{n=0} f(n,k)x^n - f(0,k) = \sum_{n=0} f(n,k-1)x^n - f(0,k-1) + x\sum_{n=0} f(n,k)x^n \tag{3}$$

Låt nu

$$g_k(x) = \sum_{n=0} f(n,k)x^k$$

vilket ger

$$g_k(x) - f(0,k) = g_{k-1}(x) - f(0,k-1) + xg_k(x)$$

som skrivs om till

$$g_k(x) = g_{k-1}(x) + xg_k(x) + f(0,k) - f(0,k-1) \tag{4}$$

Observera att

$$g_0(x) = \sum_{n=0} f(n,0)x^k = 1 + x + x^2 + \dots \tag{5}$$

och att $f(0,k) - f(0,k-1) = 0$ för alla $k \geq 2$ men -1 för $k = 1$.

Multiplicera nu (4) med y^k och summera för $k \geq 1$. Det ger

$$\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k =$$

$$\sum_{k\geq 1} g_{k-1}(x)y^k + x\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k + \sum_{k\geq 1} \left(f(0,k) - f(0,k-1)\right)y^k$$

som vi förenklar till

$$\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k = \sum_{k\geq 1} g_{k-1}(x)y^k + x\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k + \left(f(0,1) - f(0,0)\right)y^1$$

$$\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k = \sum_{k\geq 1} g_{k-1}(x)y^k + x\sum_{k\geq 1} g_k(x)y^k - y$$

Lägg till termer (samt skifta index) så att vi summerar från $k = 0$. Det ger oss

$$\sum_{k\geq 0} g_k(x)y^k - g_0(x) = y\sum_{k\geq 1} g_{k-1}(x)y^{k-1} +$$

$$+x\left(\sum_{k\geq 0} g_k(x)y^k - g_0(x)\right) - y$$

Kalla $\sum_{k\geq 0} g_k(x)y^k$ för $h(x,y)$ och vi får

$$h(x,y) - g_0(x) = yh(x,y) + xh(x,y) - xg_0(x) - y$$

Med (5) får vi

$$h(x,y) = yh(x,y) + xh(x,y) + x - y$$

var ur vi löser

$$h(x,y) = \frac{x-y}{1-x-y} = \frac{x}{1-x-y} - \frac{y}{1-x-y}$$

Detta uttryck skriver vi nu om som en geometrisk serie

$$h(x,y) = x\sum_{s\geq 0}(x+y)^s - y\sum_{s\geq 0}(x+y)^s$$

som blir

$$= x\sum_{s\geq 0}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}x^t y^{s-t} - y\sum_{s\geq 0}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}x^t y^{s-t}$$

Sätter vi likhetstecken mellan koefficienten framför termen $x^n y^k$ i (2) så får vi att vi i den vänstra summan skall välja $t = n-1$ och $s = k+t = k+n-1$. I den högra summan får vi $t = n$ och $s = t+k-1 = n+k-1$. Det ger

$$f(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-1}{n}$$

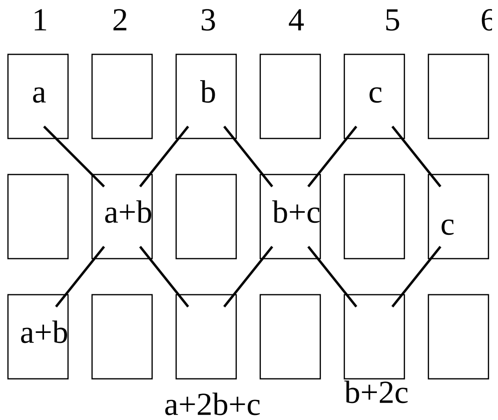
Svar: $\binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-1}{n}$

För skojs skull kan vi testa med $n = 6$ och $k = 5$ vilket enligt tabellerna ovan skall ge 42. Vi får enligt formeln i svaret:

$$\binom{10}{5} - \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4} = 6\cdot 7 = 42$$

4.2.3 Del 3

Låt oss rita pianot och hur man kan spela på pianot. Uppenbarligen börjar vi på en tangent av udda nummer (nr 1) och vi inser lätt att i nästa ton kommer vi hamna på en tangent av jämnt nummer (nr 2) och vi kommer därefter alltid att växla mellan udda respektiva jämna tangentpositioner. Detta leder oss till det ganska begränsade rörelsemönstret vi ser i figur 2.



Figur 2: Bilden visar hur man, ifall man står på tangenterna nummer 1, 3 eller 5, kan komma till tangent 2, 4 eller 6 i nästa ton. I nästa steg är det åter en udda tangent som gäller (1,3,5).

Här illustreras hur vi startar på någon av tangenterna (1,3,5) och har funnit att man kan komma dit på a respektive b respektive c olika sätt. I nästa steg kan vi komma till 2, 4 eller 6 på $a+b$, $b+c$ eller c sätt. I nästa steg kommer vi tillbaka till 1, 3 eller 5; men vi har då kunnat komma till dessa positioner på $a+b$, $a+2b+c$ eller $b+2c$ olika sätt.

Detta ger oss nu ett räkneschema. Om vi står på udda tangenter efter steg nummer n (vi står på nummer 1 efter första tonen) och antager att a_n, b_n och c_n beskriver antalet sätt att komma till dessa rutor enligt ovan; då kommer efter steg nummer $n+2$ följande relation gälla

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

Vi vet att vi initialt har $a_1 = 1$ och $b_1 = c_1 = 0$. Genom upprepade multiplikationer med matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ kommer vi efter 29 steg att ha

$$\begin{bmatrix} a_{29} \\ b_{29} \\ c_{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1557649 \\ 3499720 \\ 2806272 \end{bmatrix}$$

Denna uträkning gör man lättast med hjälp av dator eftersom matrisen inte ger någon möjlighet till en trevlig diagonalisering.

I den 30:e tonen skall vi nå tangent nummer 4 och det kan vi då göra på $b_{29} + c_{29} = 3499720 + 2806272 = 6305992$ olika sätt.

Svar: 6 305 992 sätt

4.3 Fråga 5

På $\mathbf{R}^4$ definieras en produkt * på följande sätt:

$$(a,b,c,d) * (a',b',c',d') =$$
$$(cd' - c'd, ac' - a'c + cb' - c'b, a'd - ad' + bd' - b'd, c'd - cd')$$

eller mer läsligt uttryckt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cd' - c'd \\ ac' - a'c + cb' - c'b \\ a'd - ad' + bd' - b'd \\ c'd - cd' \end{pmatrix}$$

Bestäm samtliga delmängder S av $\mathbf{R}^4$ som uppfyller följande två villkor:

1. $x, y \in S$ och $a, b \in \mathbf{R}$ medför $ax + by \in S$
2. $x \in S$ och $y \in \mathbf{R}^4$ medför $x * y \in S$

Det ges också en extrauppgift för att eventuellt avgöra rangordningen av de tävlande utifall att juryn inte kan skilja dem åt.

> Fyra mycket snåla systrar har fått ärva en kolonilott. Lotten har formen av triangel där alla sidor är tjugo meter. Systrarna är överens om att dela kostnaderna för ett staket som delar in lotten i fyra till arean lika stora delar och dom vill ha din hjälp med indelningen. Sätter upp det gör dom själva. Hur kort kan du kan göra ett sådant staket? Staketet kan vara krokigt. Beskriv formen på staketet och ange längden med tre decimaler. Du behöver inte bevisa att ditt svar är optimalt, men om du gör det är det förstås en bonus.