Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

augusti 2007

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till alla intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkommen.

1 Richard Feynman

I boken “Surely you’re joking Mr. Feynman” läser jag om hur Richard Feynman[1] tävlade i aritmetiska beräkningar mot en person som var väldigt flink med sin abacus. Feynman var mycket långsammare med att addera ett stort antal tal (i huvudet), även multiplikation gick långsammare men inte mycket. Sedan blev det oavgjort i divisionen. Som avslutning skulle de beräkna kubikroten ur ett tal. Nu är kubikroten ett (ö)känt sömnpiller om man försöker följa en aritmetisk algoritm. Det är bara vansinne att ge sig på kubikroten utan tabeller över logaritmer och antilogaritmer eller kunskap om Newton-Raphsons metod. Det visade sig dock att Feynman vann denna del av tävling med hästlängder. Hur?

Uppgiften var att beräkna $\sqrt[3]{1729{,}03}$. Hur gjorde han detta? Jo genom att veta att $12^3 = 1728$ (du minns väl den klassiska historien om Ramanujan, Hardy och 1729?) och att

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$$

och för ett tal som vi skriver som $A^n + \varepsilon$ där ε är väldigt litet får vi

$$\sqrt[n]{A^n+\varepsilon} = A \cdot \sqrt[n]{1+\frac{\varepsilon}{A^n}} \approx A\left(1+\frac{\varepsilon}{nA^n}\right) = A + \frac{\varepsilon \cdot A}{n \cdot A^n}$$

Jag förkortar inte den sista termen, för det kan underlätta att inte göra så, ifall $\varepsilon \cdot A$ och $n \cdot A^n$ är tacksamma tal (d.v.s. det underlättar räknandet). Vi bryter ut 12^3 och får alltså

$$\sqrt[3]{1729{,}03} = \sqrt[3]{1728+1{,}03} = 12\sqrt[3]{1+\frac{1{,}03}{12^3}} \approx$$

$$\approx 12\left(1+\frac{1{,}03}{3\cdot 12^3}\right) = 12 + \frac{12\cdot 1{,}03}{3\cdot 12^3} = 12 + \frac{4{,}36}{12^3}$$

och eftersom $12^3 \approx 2000$ så får vi resultatet

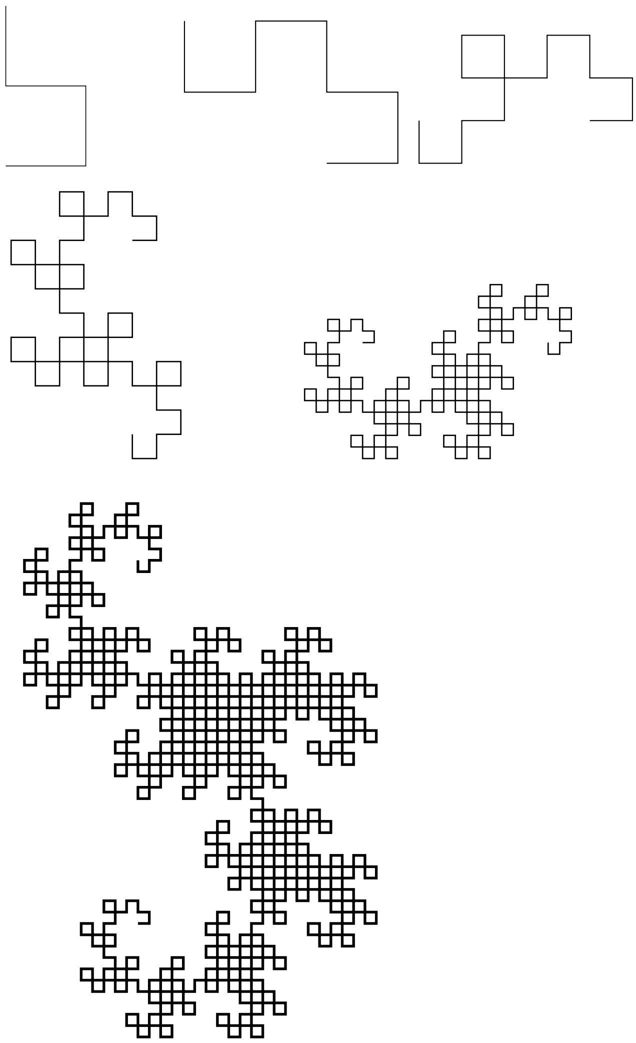
$$\approx 12 + \frac{4}{2000} = 12{,}002$$

Det korrekta svaret är ungefär 12, 002 3838...

Slutsatsen var att Feynmans motståndare bara kunde hantera sin abacus väldigt snabbt men han kunde inget om tal. Detta är värt att fundera över då det gäller undervisning.

2 Pappersvikning

Återigen handlar det om att vika papper. Du har säkerligen någon gång testat att vika en smal pappersremsa på mitten och sedan fortsätta vika det vikta pappret på mitten upprepade gånger. När du sedan vecklar ut pappret kommer du att få ett mönster som vid en första anblick kan få dig att tänka på ett havererat dragspel. Gör man detta mer noggrannt och systematiskt, eller t.ex. med hjälp av en dator så kommer man att få följande mönster på papprets vikningar. Det internationella namnet är *dragon curve* och det är ett fraktalt mönster.



[1]R. Feynman (1918-1988) är en välkänd fysiker och nobelpristagare.

Större bilder kan fås på beställning, t.ex. om man verkligen vill testa att leta upp den punkt i mönstret som utgör den speciella punkt kring vilken du kan vrida figurerna så att de sammanfaller. Det är en fascinerande egenskap för detta mönster. Observera komplexiteten i mönstret. Med n vikningar har vi $2^n - 1$ "hörn" och 2^n raka sträckor på kurvan. För $n = 10$ är vi uppe i ett tusental tal hörn. För 20 vikningar, miljonen hörn.

På `http://taljaren.se/papperfolding.avi` finns det ett litet bildspel som visar hur kurvan växer fram.

3 Orsak och korrelation

I DN[2] kan man läsa rubriken "Skolmatten gör dig till en bättre biolog". Direkt bör man kanske tänka att den där rubriken har ett par problem. Som jag tolkar det har de funnit en korrelation mellan att läsa mer matematik på highschool och att få bra betyg på kurser i biologi, kemi och fysik på universitetet. Det finns alltså ett mönster i siffrorna. Men finns det en egentlig orsak bakom detta? Kan det vara så att bara för att du läser mer matematik så får du per automatik bättre betyg? Eller kan det vara så att det är de som är mer teoretiskt lagda som får högre betyg och att det är dessa samma som läser mer matematik?

Det finns (antager jag) en korrelation mellan antalet poliser och antalet brott som begås i en stad. Är då slutsatsen att för att minska antalet brott skall man minska antalet poliser?

Man skall dock inte underskatta möjligheten att det faktiskt ger något att läsa matematik och att det blir något som kan hjälpa i andra ämnen.

Förresten, vad är det egentligen som definierar dig som en bättre biolog än en annan biolog? Dessutom tycker jag DN skall sluta kalla matematik för matte.

3.1 Burger King

När vi ändå är inne på det kan vi granska reklamen från Burger King. De har haft reklamen

> *"99,999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 % kött är inte tillräckligt"*

De tycker alltså att det är för mycket att ha 1 del icke-kött i 10^{41} delar hamburgare. Nu finns det något som heter atomer och molmassa som varken den som kom på reklamen eller homeopaterna tycks inte känna till.[3] Molmassan handlar om att i storleksordning 10^{26} atomer väger 1 kg. En hamburgare där vi har $10^{41} - 1$ "köttatomer" skulle alltså behöva väga i storleksordningen $10^{41-26} = 10^{15}$ kg. Kan detta vara den totala mängden kött de pratar om? Det skulle motsvara $10^{15}/10^{10} = 10^5$ kg per person, d.v.s. att vi äter 100 ton hamburgare per person. Lever en person 100 år blir det 1 ton hamburgare per år, d.v.s. ungefär 3 kg hamburgare per dag!

En annan slutsats är att en vanlig hamburgare inte kan innehålla dessa 99,999...999% kött. Det finns inte atomer nog för att representera denna oerhörda precision i en vanlig hamburgare.

[2] http://www.dn.se/DNet/jsp/polopoly.jsp?d=554&a=674621

[3] Jag erkänner jag också har glömt en del om detta.

4 Aristarchus och $\sin 3^\circ$

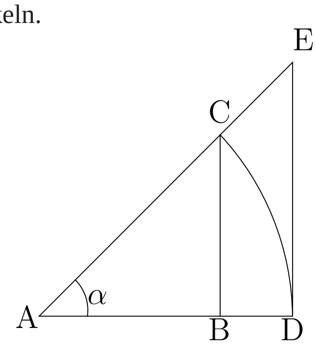
Jag gjorde ett besök i astronomiska biblioteket här i staden och tittade i en bok som hette "*Aristarchus of Samoa*" av T. Heath. Det jag sökte var hur Aristarchus fann sin uppskattning av $\sin 3^\circ$ till $\frac{1}{20} < \sin 3^\circ < \frac{1}{18}$. I boken fann jag följande utsagor

Om $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ så gäller

$$\text{kvoten } \frac{\sin\alpha}{\alpha} \text{ minskar då } \alpha \text{ ökar från 0 till } \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

$$\text{kvoten } \frac{\tan\alpha}{\alpha} \text{ ökar då } \alpha \text{ ökar från 0 till } \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

För att övertyga sig om detta ritar vi två trianglar i enhetscirkeln.



Vinkeln CAB är α och $AD = 1$. Arean av triangeln ABD är $\frac{1}{2}\sin\alpha$, triangeln AED är $\frac{1}{2}\tan\alpha$ och cirkelsektorn ACD har arean $\frac{1}{2}\alpha$ och det ger oss $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$. Exakt hur man kommer fram till (1) och (2) utan derivator eller moderna trigonometriska formler vet jag inte. Med derivator får vi att

$$D\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} = \cos\alpha\frac{\alpha - \tan\alpha}{\alpha^2} < 0$$

eftersom $\alpha < \tan\alpha$. Alltså är kvoten avtagande då α växer upp mot $\frac{\pi}{2}$. Vidare är

$$D\frac{\tan\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha(1+\tan^2\alpha) - \tan\alpha}{\alpha^2}$$

Multiplicera nu detta uttryck med den strikt positiva termen $\alpha^2\cos^2\alpha$ och vi får

$$= \alpha\cos^2\alpha + \alpha\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

och alltså är derivatan $\frac{1}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) > 0$ eftersom $2\alpha > \sin 2\alpha$ för alla $\alpha > 0$.

Åter till Aristarchus uträkningar. Följande olikheter ställs upp (vi tar dem i tur och ordning och inte alla på en gång).

$$\text{Om } m > 1 \text{ så } \sin\frac{\pi}{2m} > \frac{1}{m} \tag{3}$$

Detta kan vi sluta oss till med (1). Om $m > 1$ minskar så kommer $\frac{\pi}{2m}$ att växa från 0 till $\frac{\pi}{2}$ och då kommer kvoten

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}$$

minska. Det minsta värdet på kvoten antages alltså när $m = 1$ och det ger oss olikheten

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} > \frac{\sin\frac{\pi}{2\cdot 1}}{\frac{\pi}{2\cdot 1}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2m} > \frac{1}{m}$$

Nästa olikhet är

$$\text{Om } m > 1 \text{ så är } \cos\frac{\pi}{2m} > \frac{m-1}{m} \tag{4}$$

Detta följer av att

$$\cos\frac{\pi}{2m} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m-1}{m}\right) > \frac{m-1}{m}$$

Den sista olikheten är en direkt tillämpning av (3).

Härnäst kommer att

$$\text{Om } m > 2 \text{ så } \sin\frac{\pi}{2m} < \tan\frac{\pi}{2m} < \frac{2}{m} \tag{5}$$

Den första olikheten är given eftersom $\sin x < \tan x$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$. För att visa $\tan\frac{\pi}{2m} < \frac{2}{m}$ för $m > 2$ så måste vi använda (2). Vi inskränker den till att vinkeln α skall växa från 0 till $\frac{\pi}{4}$. Det gäller då att

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \iff \tan\alpha < \frac{4\alpha}{\pi}$$

Om $\alpha = \frac{\pi}{2m}$ så får vi

$$\tan\frac{\pi}{2m} < \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2m} = \frac{2}{m}$$

Nästa olikhet är

$$\text{Om } m > 3 \text{ så } \sin\frac{\pi}{2m} > \frac{3}{2m} \tag{6}$$

Den följer ur (1) om vi låter α gå från 0 till $\frac{\pi}{6}$. Det gäller då att

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} > \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \iff \sin\frac{\pi}{2m} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\pi}{2m} = \frac{3}{2m}$$

Den avslutande olikheten är

$$\text{Om } m > 4 \text{ så } \sin\frac{\pi}{2m} < \tan\frac{\pi}{2m} < \frac{5}{3m} \tag{7}$$

Första olikheten är uppenbar, den andra följer ur att låta α gå från 0 till $\frac{\pi}{8}$. Precis som tidigare får vi att

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}}$$

som ger oss för $\alpha = \frac{\pi}{2m}$ att

$$\tan\frac{\pi}{2m} < \frac{\pi}{2m}\cdot\frac{8}{\pi}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{4}{m}\tan\frac{\pi}{8}$$

Nu gjorde Aristarchus approximationen $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$ (Bekräfta själv att det korrekta värdet $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$) som då ger oss

$$\tan\frac{\pi}{2m} < \frac{4}{m}\cdot\frac{1}{1+\frac{7}{5}} = \frac{5\cdot 4}{m\cdot 12} = \frac{5}{3m}$$

Dessa olikheter ger oss nu att

$$\frac{3}{2m} < \sin\frac{\pi}{2m} < \frac{5}{3m}$$

För $m = 30$ får vi

$$\frac{3}{2\cdot 30} < \sin\frac{\pi}{2\cdot 30} < \frac{5}{3\cdot 30}$$
$$\frac{1}{20} < \sin\frac{\pi}{60} < \frac{1}{18}$$

Numeriska tester visar att vi hamnar ungefär mittemellan dessa båda gränser.

4.1 Från nätet

Jag fick hjälp av en (för mig helt okänd) person på internet[4] med att härleda (1) utan derivator.

Det gäller att om $0 < x < x+h < \frac{\pi}{2}$ så kommer

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(x+h)}{h} = \frac{(x+h)\sin x - x\sin x\cos h - x\cos x\sin h}{x(x+h)}$$

$$= \frac{x\sin x(1-\cos h) + \cos x(h\tan x - x\sin h)}{x(x+h)} > 0$$

eftersom $x, \sin x, \cos x > 0$ och $1 - \cos h > 0$ och $h\tan x > hx > x\sin h$. Här ser vi att vi har en avtagande kvot då vinkeln växer. Ganska enkelt, egentligen, men ibland är man inte alltid så smart som man hade hoppats att man vore.

Stärkt av enkelheten går jag nu vidare på liknande sätt för att visa (2). Med samma förutsättningar får vi

$$\frac{\tan(x+h)}{x+h} - \frac{\tan x}{x} = \frac{x\tan(x+h) - (x+h)\tan x}{x(x+h)}$$

Låt oss strunta i nämnaren eftersom den är positiv och vi får att täljaren är

$$x\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - (x+h)\frac{\sin x}{\cos x}$$

som förenklas till

$$x\cos x\sin(x+h) - (x+h)\sin x\cos(x+h)$$

eftersom $\cos(x)\cos(x+h) > 0$ är faktorerna ointressanta. Utveckling ger

$$x\cos x\sin x\cos h + x\cos^2 x\sin h -$$
$$-(x+h)\sin x\cos x\cos h + (x+h)\sin^2 x\sin h =$$
$$x\sin h + h\sin^2 x\sin h - h\sin x\cos x\cos h =$$
$$x\sin h + h\sin x(\sin x\sin h - \cos x\cos h) =$$
$$x\sin h - h\sin x(\cos(x+h)) > x\sin h - h\sin x$$

eftersom $1 > \cos(x+h)$. Vidare antager vi att $x > h$ och då gäller enligt (1) att

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin h}{h} \iff h\sin x < x\sin h$$

och därmed är $x\sin h - h\sin x > 0$ och saken är biff.

Jag är dock fortfarande osäker om dessa metoder var kända av grekerna.

[4] robbwrr på www.sosmath.com. Riktigt festlig webbadress när du behöver lite hjälp på vägen.