Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

juni 2007

Täljaren är en (nästan) månatlig skrift om matematik och matematikundervisning riktad till alla intresserade. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet eller i andra sammanhang. Allt för att stimulera till eftertanke, kompetensutveckling och för att inte glömma bort hur kul det är med matematik. All respons är välkomen.

1 LMS

Lunds Matematiska Sällskap höll vårens sista möte 9 maj och Gert Almqvist höll ett föredrag om omöjligheten i att finna mer än sju diagonaler som skär varandra i en punkt i en månghörning (bortsett från centrum). Det var mycket som kom med i föredraget, bland annat metoder för att konstruera approximationer av n-hörningar, riktigt goda sådana. Även om 7-hörningen är omöjlig med passare och linjal kan man med dessa metoder konstruera bra imitationer av sådana.

Gert lät även publiken konstruera talet $\sqrt[3]{2}$ medelst origami. Detta tal är det tal som är målet att konstruera i det klassiska problemet "kubens fördubbling" (en kub med sidan 1 får dubbelt så stor volym om sidan ökas till $\sqrt[3]{2}$). Med de klassiska konstruktionsmetoderna är det omöjligt att konstruera detta tal. Med origami går det.

Med origami får man ytterligare en möjlig konstruktion. Givet två linjer L_1 och L_2 så kan man alltid vika pappret så att två punkter P_1 och P_2 hamnar på L_1 respektive L_2. Detta kan man utnyttja flitigt.

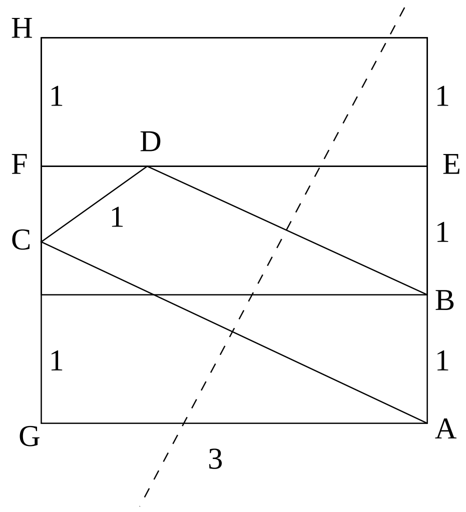
För att utföra konstruktionen så startar vi med ett kvadratiskt papper med sidan 3. Vi markerar ut punkterna A, B, C, D, E, F, G, H som i figuren. Punkterna C och D är de punkter, på GH respektive EF, som A respektive B sammanfaller med då papprets viks enligt den sträckade linjen. Vik själv!

Vi har att $CD = 1$, $DE = u$ och $DF = 3 - u$. Kalla $CH = x$ och $CG = y$. Även om man inte kan tro det i figuren så gäller det att $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$. Vi har nämligen att

$$x + y = 3 \tag{1}$$

och likformigheten i CGA och DEB ger

$$\frac{1}{u} = \frac{y}{3} \iff: u = \frac{3}{y} \tag{2}$$



Figur 1: Hur man viker sträckan $\sqrt[3]{2}$. Gör själv som övning.

Pythagoras sats i CDF ger

$$(x-1)^2 + (3-u)^2 = 1$$

och sätter vi in (1) så får vi

$$(2-y)^2 + (3-u)^2 = 1$$

och med (2)

$$4 + y^2 - 4y + \left(3 - \frac{3}{y}\right)^2 = 1$$

$$4y^2 + y^4 - 4y^3 + 9(y-1)^2 - y^2 = 0$$
$$y^4 - 4y^3 + 12y^2 - 18y + 9 = 0$$

Denna ekvation ser inte så kul ut men genom prövning finner man att $y = 1$ är en lösning. Det är tur det, för det som blir kvar är en *riktigt* trevlig tredjegradsekvation.[1] Polynomdivision ger oss den resterande ekvationen

$$y^3 - 3y^2 + 9y - 9 = 0 \tag{3}$$

(verifiera själv). Vi kan se att det finns endast en reell rot till denna ekvation eftersom

$$y^3 - 3y^2 + 9y - 9 = (y-1)^3 + 6(y-1) - 2$$

och $f = x^3 + 6x - 2$ är en strängt växande funktion. Vi kan leta heltalslösningar till ekvationen (3) men vi inser strax att $f(y) = (y-1)^3 + 6(y-1) - 2$ ger att $f(1) = -2$ och $f(2) = 5$ och vi har ingen heltalslösning där emellan.

Istället gör vi substitutionen

$$y - 1 = t \tag{4}$$

som ger ekvationen $t^3 + 6t - 2 = 0$. Det andra steget i lösandet av en tredjegradsekvation är att göra sig av med förstagradstermen. Det gör man genom den finurliga substitutionen

$$t = w - \frac{2}{w} \tag{5}$$

[1] Med "riktigt trevlig" menar jag verkligen "riktigt trevlig" så som i det man drömmer om att få på en examensskrivning.

där 2:an beräknades genom $6/3$ och 6:an kom från termen $6t$. Detta ger oss då att

$$t^3 = w^3 - 6w + \frac{12}{w} - \frac{8}{w^3}$$

och vi får

$$0 = t^3 + 6t - 2 = w^3 - 6w + \frac{12}{w} - \frac{8}{w^3} + 6w - \frac{12}{w} - 2 = w^3 - \frac{8}{w^3} - 2$$

Sätt nu

$$q = w^3 \tag{6}$$

Det ger

$$q - \frac{8}{q} - 2 = 0 \;\Leftarrow:\; q^2 - 2q - 8 = 0$$

som vi skriver

$$(q-4)(q+2) = 0$$

med lösningarna

$$\begin{cases} q = 4 \\ q = -2 \end{cases}$$

som i (6) ger

$$w = 2^{\frac{2}{3}} \quad \text{eller} \quad w = -2^{\frac{1}{3}}$$

Vi väljer att endast fokusera på $w = 2^{\frac{2}{3}}$. Läsaren uppmanas att själv verifiera att lösningen $w = -\sqrt[3]{2}$ ger samma lösningar i slutändan. Formel (5) ger oss då

$$t = w - \frac{2}{w} = 2^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}$$

och (4) ger $y = 1 + t = 1 + 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}$. Ekvation (1) ger $x = 2 - 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$. Den observante ser nu direkt att $x = 2^{\frac{1}{3}} \cdot y$ och påståendet är visat.

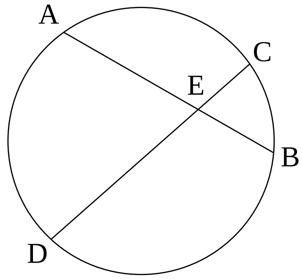
Det trevliga med denna ekvation är så klart att vi får så otroligt enkla lösningar till tredjegradsekvationen.

1.1 Kordasatsen

Åhörarskaran tillfrågades om huruvida de kände till denna. Det gjorde iallafall alla framför mig. Hur kunskapsläget var på de bakre bänkraderna kan jag inte uttala mig om. I allafall försäkrades det från publiken om att studenterna fr.o.m. hösten skall få lära sig denna och även kunna bevisa den. På LTH planerar de tydligen att göra ändringar i matematikundervisningen. Det skall bli intressant att få höra mer om hur detta utvecklar sig.

Om vi t.ex. vet att $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ så använder vi kordasatsen för att få fram sträckan $\sqrt[3]{2}$. Vi har delningen av GH i C som ger $x = \sqrt[3]{2}y$. Dra upp sträckan AB så at $AE = x$ och $EB = 1$. Rita sedan ut CE med längden y och rita cirkeln som går genom A, C och B.

Enligt kordasatsen är då $DE = \frac{AE \cdot EB}{EC} = \frac{x \cdot 1}{y} = \sqrt[3]{2}$.



Figur 2: Hur man konstruerar $\sqrt[3]{2}$ med hjälp av x och y från origamiövningen.

2 Newtonsmetod för komplexa rötter

Newton-Raphsons metod för att numeriskt lösa ekvationen $f(x) = 0$ där f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ känner vi alla till. Vi har ju den iterativa formeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Givet ett startvärde x_0 så hoppas vi att x_n närmar sig en lösning till ekvationen då $n \to \infty$. Om inga speciella hinder föreligger så brukar man redan för $n = 20$ ha fått fram goda approximationer av lösningen.

Som exempel tar vi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Maple säger att lösningarna är

```
evalf(solve(x^3-2*x^2+3*x-1=0,x));
0.430      0.785-1.307i     0.785+1.307i
```

Med hjälp av t.ex. Scilab letar vi upp den första roten (vi låter $df(x)$ vara derivatan av $f(x)$)

```
deff("y=f(x)","y=x^3-2*x^2+3*x-1");
deff("y=df(x)","y=3*x^2-4*x+3");
x=57;
format(40); // fler decimaler
x=x-f(x)/df(x)
```

Sedan upprepar vi det sista kommandot flertalet gånger (genom att trycka på “pilupp” tangenten följt av “Enter”. Efter ett par tryckningar ser vi att vi når lösningen. En kontrollberäkning

```
f(x)
```

ger svaret 0.

Men hur hittar vi de komplexa startvärdena? Då måste vi börja med ett komplext startvärde eftersom (7) annars aldrig skulle ge oss några komplexa värden.

Låt oss testa med komplexa värden! Vad gäller startvärde väljer vi $42 + 3i$. Det är valt helt utan eftertanke. Låt oss se vad det ger.

```
x = 42 + 3*%i
```

Notera hur vi skriver den imaginära enheten. Vi kör kommandot

```
x = x - f(x)/df(x)
```

många gånger och tillslut får vi till vår förvåning det rent reella resultatet 0,4301597... d.v.s. lösningen vi fann tidigare.

Låt oss testa ett annat startvärde. Vi väljer $-3 + 47i$.[2]

Samma iterativa beräkningar ger $0{,}78492 + 1{,}307141i$, d.v.s. en av de komplexa rötterna. Du kan själv kontrollera att $3 - 28i$ ger den andra komplexa roten. För att hitta lösningarna med Newton-Raphsons metod måste vi alltså använda flera olika startvärden. Det är nu det spännande börjar. Låt oss se vad följande tre startvärden ger

Startvärde	Lösning
`1,8461 + 0,94188 i`	0,785-1,307i
`1,8466 + 0,94188 i`	0,430
`1,8466 + 0,94208 i`	0,785+1,307i

Dessa startvärden ligger väldigt nära varandra, men de genererar ändå väldigt spridda lösningar. Det vi har här är ett kaotiskt beteende. Små ändringar i invärdet leder till stora skillnader i resultatet. När man utför beräkningarna ser man hur de plötsligt växer sig stora för att sedan närma sig en av lösningarna.

Om du går till denna länk `http://www.taljaren.se/complex_newton.png` så kommer du att se hur jag har färglagt punkter i det komplexa talplanet beroende på vilken av lösningarna de konvergerar mot. Där finns även källkod för den som vill studera mönstret närmre. I programmet kan du klicka dig närmre och välja hur pass nogrannt mönster du vill se. Har jag tur kan jag framställa ett färdigt körbart program för windowsanvändare.

3 Böcker

Allan Gut har kommit ut med en bok som heter "*Konsten att räkna*". Den kommer nog göra sig bra i hängmattan i sommar.

"*Twenty years before the blackboard*" är titeln på en bok av Michael Stueben. Undertiteln är "*The Lessons and Humor of a Mathematics Teacher*". Den borde alla blivande lärare i matematik få läsa för den innehåller mycket tänkvärt även om minnesramsorna för decimalerna i π var tämligen meningslösa.

Jag tänkte citera ett par rader ur den

> *Q: How many psychologists does it take to change a light bulb?*
>
> *A: Only one, but the light bulb must really want to change.*
>
> *Q: How many mathematicians does it take to change a light bulb?*
>
> *A: None. The mathematician merely gives the light bulb to a psychologist, therby reducing the problem to a previously solved case.*

Jag vet inte om man behöver säga så mycket mer om det där med "matematiklärarhumor".

[2] Detta värde är inte helt slumpmässigt valt utan här fuskar jag och väljer ett som passar mitt syfte.

I boken visas även att $\sqrt{2}$ är irrationellt på ett mycket elegant sätt.

Om $\sqrt{2}$ är rationellt, då skulle det finnas ett minsta positivt tal q så att $\sqrt{2}q$ är ett heltal, men det motsäger det faktum att $k = \left(\sqrt{2} - 1\right) q$ är ett mindre tal med samma egenskap.

Det är helt klart ett mycket elegantare bevis än det som vanligen brukar ges:

Antag att $\sqrt{2}$ vore rationellt. Då skulle $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ gälla för två relativt prima heltal a och b. Kvadrering och omskrivning ger $2b^2 = a^2$ och a måste vara delbart med 2 eftersom 2 är ett primtal. Då är $a = 2\alpha$ för ett heltal α och insättning ger efter förkortning $b^2 = 2\alpha^2$ och då är även b delbart med 2. Detta strider mot att a och b är relativt prima och följdaktligen måste $\sqrt{2}$ vara irrationellt.

4 κ — 2007

I matematiktävlingen för lärare löd senaste frågan:

> *Om a, b, c är positiva rationella tal sådana att $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ är ett rationellt tal så måste $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ alla vara rationella tal.*

Här är svaret jag gav på detta.

4.1 Bevis

Om $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = r$ där r är ett rationellt tal, så har vi fyra möjligheter. Antingen är 0, 1, 2 eller 3 av $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ rationella. Vi skall nu visa att den enda möjligheten är att alla tre är rationella.

- Om 2 av dem är rationella så kan vi utan inskränkning antaga att det är $\sqrt{a}$ och $\sqrt{b}$. Det innebär att $\sqrt{c} = r - \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Högerledet är rationellt men vänsterledet är irrationellt så vi kan utesluta att två av dem är rationella.

- Om 1 av dem är rationellt så kan vi utan inskränkning antaga att det är $\sqrt{a}$. Det ger oss att $\sqrt{b}+\sqrt{c} = r-\sqrt{a} = q$ där q är rationellt. Observera att $q \neq 0$ eftersom högerledet är större än 0 då b och c är positiva och irrationella. Vi skriver om likheten till $\sqrt{b} = q - \sqrt{c}$ och kvadrerar. Det ger oss $b = q^2 + c - 2q\sqrt{c}$. Vi kan lösa ut $\sqrt{c}$ och få
$$\sqrt{c} = \frac{q^2 + c - b}{2q}$$
Högerledet är rationellt medan vänsterledet inte är det. Vi kan alltså inte ha det så att bara en av dem är rationellt.

- Om inget av dem är rationellt så skriver vi $\sqrt{a} + \sqrt{b} = r - \sqrt{c}$. Kvadrering ger $a + b + 2\sqrt{ab} = r^2 + c - 2r\sqrt{c}$. Vi kan skriva om det som $\sqrt{ab} = q - r\sqrt{c}$ där $q = \frac{1}{2}\left(r^2 + c - a - b\right)$ är rationellt. Ytterligare en kvadrering ger $ab = q^2 + r^2c - 2qr\sqrt{c}$. Vi löser ut $\sqrt{c}$ och får
$$\sqrt{c} = \frac{ab - q^2 - r^2c}{-2qr}$$
Högerledet är rationellt men vänsterledet är irrationellt. Det motsäger att $\sqrt{c}$ är irrationellt.
Man kan observera att $q \neq 0$ eftersom $\sqrt{ab} + r\sqrt{c} = q$.

Den enda möjligheten som kvarstår är att alla tre är rationella.

4.2 κ — 2007

Nästa fråga i matematik tävlingen är tredelad och lyder

1. En kompositör i paradiset vill komponera melodier för sitt piano som är oändligt utsträckt åt båda hållen och bara har vita tangenter. Hennes melodier skall ha egenskapen att efter en ton kommer antingen tonen närmast högre eller närmast lägre. Hur många melodier kan hon komponera som består av n toner, om alla melodierna skall börja i en viss tangent och sluta med tangenten som befinner sig k steg åt höger på pianot?

2. En annan kompositör som befinner sig i skärselden har ett piano som bara utsträcker sig oändligt till höger (och har en vägg till vänster). Han vill komponera melodier på samma sätt som sin kollega i paradiset. Hur många melodier kan han komponera som består av n toner och som alla börjar med tangenten längst till vänster och som slutar med tangenten som har nummer k från vänster (tangenten längst till vänster har nummer 1).

3. En tredje stackars kompositör befinner sig i helvetet. Där har pianot bara 6 tangenter. Hur många melodier som består av 30 toner kan komponeras om man följer samma regel som kollegerna ovan och om alla melodierna börjar på den första tangenten och slutar på den fjärde tangenten?

Svarstiden går ut i slutet på september och därefter kommer fråga 5 som är finalfrågan.

5 Undervisning

På `http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome20/` såg jag en länk till ett dokument som handlade om att undervisa matematik för en blind elev. Jag tittade snabbt igenom och såg en del intressanta bilder. Bråkräkning (i blandad form) med Braille känns tufft.

6 Sommar

Jag kommer inte sluta tänka utan bara göra ett uppehåll i författandet av Täljaren. Men jag återkommer!