Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

maj 2007

Täljaren är en liten skrift om matematik och matematikundervisning. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet. Allt för att stimulera till eftertanke och kompetensutveckling. Alla bidrag är välkomna.

1 På östfronten något nytt

I Finland har man precis öppnat "*Resurscenter för matematik, naturvetenskap och teknik i skolan*", och de finns på `http://www.skolresurs.fi`.

De planerar att ge ut ett nyhetsbrev ett par gånger per år och det första finns ute nu. Den som har ett batteri, två magneter och en kopparplåt kan bygga en liten "bil" enligt deras instruktioner.

1.1 Humor

Det har kanske framgått att jag gillar ordvitsar, speciellt bra sådana. Här är en till sådan.

> *Varför är det kallt i den tomma mängden?*
>
> *Det finns inte ett enda element i den.*

2 Fibonaccivariant

Jag såg nyligen en fråga i boken "Generatingfunctionology" av Herbert Wilf.[1] Jag kände mig tvungen att titta närmre på den. Vi har givet en talföljd $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ som inleds med $f_0 = 1$ och rekursionsekvationen

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Det saknas dock ett startvilkor för f_1. Istället känner vi till att $f_{735} = 1$. Vad har vi då för startvärde på f_1?

Uppenbarligen är det svårt att prova sig fram. Vi kan ana att om vi sätter $f_1 = r$ så kommer vi i slutänden få en linjär ekvation i r men det säger oss bara att vi kan vänta med att pröva irrationella värden på r. Låt oss istället arbeta med rekursionen. Vi får

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 & r_3 &= 1 + 2r \\ r_1 &= r & r_4 &= 2 + 3r \\ r_2 &= 1 + r & r_5 &= 3 + 5r \end{aligned}$$

Nu lyfter vi på ögonbrynen. Vi ser talen 1, 1, 2, 3, ... och $r, r, 2r, 3r, 5r, ...$ där vi läser koefficienterna 1, 1, 2, 3, 5, ... Det är förstås Fibonaccitalen vi får fram. Det innebär att $f_n = F_{n-2} + rF_{n-1}$ för $n \geq 2$ där F_n är det n:te Fibonaccitalet. Det ger oss ekvationen

$$f_{735} = F_{733} + rF_{734} = 1$$

som ger

$$f_1 = r = \frac{1 - F_{733}}{F_{734}}$$

Det kan tilläggas att både F_{733} och F_{734} består av över 150 siffror och utelämnas därför på grund av platsbrist.

Däremot inkluderar jag lite Maplekod för den som vill räkna ut talen på egen hand.

```
with(combinat, fibonacci):
r:=(1-fibonacci(733+1))/fibonacci(734+1);
a:=1; b:=r;
for k from 2 to 735 do
     c:=a+b; a:=b; b:=c;
end;
```

Du kommer se många långa bråk och tillslut ser du $c := 1$.

3 $24 \mid p^2 - 1$

Vi skall visa att 24 delar $p^2 - 1$ om p är ett primtal ≥ 5. Denna finns med i en av de böcker för diskret matematik som används idag. Där har de dock en lösning som hoppar över ett viktigt steg.

Så här tänkte jag mig att man kunde lösa den.

Varje primtal $p \geq 5$ kan skrivas som $p = 6n + 1$ eller $p = 6n + 5$ för något heltal $n \geq 1$ (i fallet $p = 5$ inser vi direkt att $5^2 - 1$ är delbart med 24). Du inser lätt själv att det inte går att skriva ett primtal (≥ 5) som $6n \pm 2$ eller $6n + 3$ eftersom primtalet då vore delbart med 2 respektive 3.

Om $p = 6n + 5$ så får vi

$$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) =$$

$$(6n + 6)(6n + 4) = 12(n + 1)(3n + 2)$$

Nu gäller det att antingen är $n + 1$ jämnt (om n är udda) eller så är $3n + 2$ jämnt (om n är jämnt). Alltså kan vi alltid bryta ut faktorn 2 ur $(n + 1)(3n + 2)$ och $p^2 - 1$ är därmed delbart med 24.

Om $p = 6n + 1$ så får vi $p^2 - 1 = (6n + 2)(6n) = 12n(3n+1)$. Om n är udda så är $3n+1$ jämnt, om n är jämnt så är n jämnt (så klart) och vi kan alltid bryta ut faktorn 2 ur $n(3n + 1)$ och därmed är $p^2 - 1$ delbart med 24.

Ett alternativt sätt är att betrakta alla primtal som om de vore skrivna på formen $12n \pm 1$, $12n \pm 5$ för heltal n. Dessa former ger, tagna i kvadrat och subtraherade med 1:

$$(12n \pm 1)^2 - 1 = 144n^2 \pm 24n \equiv 0 \text{ mod } 24$$

[1]Boken finns fritt tillgänglig på internet. Besök `http://www.cis.upenn.edu/~wilf/`

respektive

$$(12n \pm 5)^2 - 1 = 144n^2 \pm 120n + 24 \equiv 0 \bmod 24$$

Alltså är de alltid delbara med 24.

4 Vinkelns tredelning

Man hade ju hoppats att det var allmänt känt att en vinkel inte kan tredelas (d.v.s. delas i tre lika stora delar) med de klassiska verktygen passare och linjal. Trots att det har bevisats vara omöjligt fortsätter en del hävda motsatsen. Av en händelse snubblade jag över en sida på nätet[2] där det refererades till en bok "*New theory of trisection*" av Fen Chen. Jag ger inget ISBN-nummer eftersom jag inte vill förleda någon att börja leta efter den. I vilket fall som helst behandlade webbsidan Chens metod att tredela en vinkel. Med enkel trigonometri visades att Chen har fel. En vinkel på 60 grader ger ett fel på 0,06 grader, d.v.s. ett fel på 0,1%. Nära men ändå fel.

På sidan skriver de även om hur Chen försvarar sitt verk.

> *"mathematical reason has proved that an algebraic method is not appropriate method for discussing trisection." ... "He doesn't allow trigonometry, either. So, his method cannot be disproved, even by counterexample."*

Nu behöver man nog inte läsa en kurs i vetenskapsteori eller liknande, men när det finns klara och tydliga bevis för att något inte stämmer, då tycker jag det är rätt uppenbart vilken slutsats man skall dra.

På webbsidan skrivs det om andra saker som Chen använder till sitt försvar.

- *Proof by Autocad:*[3] *His method has checked out perfectly, using Autocad.*
- *Proof by "Have I ever lied to you?": He wrote to me, "If my theory is not true, it would not be published."*
- *Trigonometry is inherently inaccurate: He bases this idea on the truism that* $\sin x < x < \tan x$ *(with* x *in radians), while not explaining what this has to do with anything. Apparently he thinks that sines and tangents do not have exact values.*

Jag har ibland, för att lätta upp stämningen, tagit med avsnitt om "tossiga bevismetoder". Men dessa var nya! Punkt 2 är nog den allvarligaste.

Nu kunde jag ju inte låta bli att se om boken fanns på någon av internets alla boklådor. Det fanns den, men jag var mest intresserade av kommentarerna till boken. Här är en höjdare!

> *Either come up with a purely geometric proof of impossability or do not speak ill of those who attempt to solve the "impossible."*

[2]http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm

[3]Autocad är ett ritprogram som används flitigt i industrin för att göra ritningar.

Visst hade det varit kul att se ett geometriskt bevis för att det är omöjligt att göra, men vi har redan ett bevis. Det utnyttjar kopplingen mellan geometrin och algebran. Den kopplingen skall vi vara glada för och ära. Vi skall också utnyttja den till max!

Det skall dock tilläggas att vissa enskilda vinklar är enkla att tredela, t.ex. 180 grader, men vi talar ju om det allmänna fallet.

4.1 Pedagogisk undran

Hur många elever vet om huruvida man kan tredela en vinkel? Borde man inte lyfta fram alla dessa omöjligheter så man kan motverka att folk utvecklas till cirkelkvadrerare? Utöver tredelningen har vi dubblingen av kubens volym och cirkelns kvadratur, d.v.s. skapa en kvadrat med samma area som en cirkel.

Det är viktigt att i samband med detta ta upp att en godkänd konstruktion kräver att konstruktionen kan utföras i ett ändligt antal steg. Annars skulle vi utifrån en given vinkel α kunna konstruera bisektriser till denna och på så sätt skapa vinklarna $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{16}$, $\frac{\alpha}{64}$, $\frac{\alpha}{256}$ o.s.v. Dessa vinklars summa är

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{16} + \frac{\alpha}{64} + \frac{\alpha}{256} + \ldots = \alpha \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{\alpha}{3}$$

Därmed skulle vi kunna dela en vinkel i tre delar, rent teoretiskt. I praktiken skulle vi aldrig bli klara med arbetet.

4.2 Vinkelns tredelning är omöjlig

Man kan fråga sig hur man kommer fram till att man bevisar att man inte kan tredela en vinkel. I princip går det ut på att först konstatera att varje konstruerbart tal är ett algebraiskt tal, men inte tvärtom; det finns alltså algebraiska tal som inte är konstruerabara.

Nu gäller det att ett tal är algebraiskt exakt då det är en lösningen till en ekvation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

där alla a_i är heltal. För att verkligen visa att vi inte kan tredela vinkeln så behöver vi göra närmre undersökningar men jag hoppar över detta denna gång. Men har det i åtanke för kommande nummer.

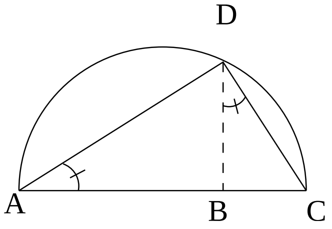
Att cirkeln inte kan kvadreras följer från att π inte är algebraiskt utan är transcendent. Därmed är det inte konstruerbart. Egentligen är det $\sqrt{\pi}$ man vill konstruera, men att kunna konstruera talet α är ekvivalent med att kunna konstruera talet $\sqrt{\alpha}$. Detta ser vi genom att betrakta figur 1.

Där utgår vi från den kända sträckan $AB = \alpha$. Vi förlänger med sträckan BC som har längden 1. AC låter vi vara diametern på cirkelbågen som går genom D. Dra BD. Likformigheten ger oss nu att

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD} \Leftarrow: BD^2 = BC \cdot AB$$

som ger

$$BD = \sqrt{\alpha \cdot 1} = \sqrt{\alpha}$$



Figur 1: Konstruktionen av $\sqrt{\alpha}$. I figuren är $AB = \alpha$, $BC = 1$ och $BD = \sqrt{\alpha}$.

För att från $\sqrt{\alpha}$ konstruera α (tror jag) att vi kan använda samma konstruktion. Vi har BD given. Dra BC och förläng den så den går förbi punkten A (d.v.s. gör den tillräckligt lång). Förbind DC och dra sedan en normal till DC genom punkten D. Denna skär då AB i A och sedan är $AB = a$.

5 Tips av olika slag

Herbert Wilf har många trevliga länkar på sin webbsida `http://www.cis.upenn.edu/~wilf/`. När skall man få tid till att läsa allt?

För övrigt har jag läst boken "Morbror Volfram" av Oliver Sacks. Det var en mycket trevlig bok. Jag tror till och med att den som inte gillar kemi skulle tycka om den, eftersom han verkligen skriver medryckande. Jag rekomenderar den.

Ur en pedagogisk synvinkel frågar jag mig: hur hanterar skolan alla dem som har ett stort intresse för ett visst ämne, och då menar jag ett intresse som leder eleverna långt utanför ämnets ramar? Den kemilärare som hade haft Oliver Sacks hade fått mycket (roligt) att göra för att kunna hålla jämna steg med hans kunskapstörst.

Som en parentes förundras man över hur mycket roligare han måste ha haft det när han i princip kunde köpa vilka grundämnen och kemiska föreningar som helst i en kemikalieaffär, som 13 åring! Cyankalium kunde barn köpa i England på 40-talet.

6 κappa 2007

I Theducations tävling för matematiklärare har andra frågan publicerats. Den lyder:

> Visa att om a, b, c är positiva rationella tal sådana att $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ också är ett rationellt tal, så måste $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ alla vara rationella tal.

Tyvärr har jag inte möjlighet att publicera svaret här nu då svarstiden ej har gått ut än, men läsarskaran uppmanas att ge sig i kast med problemet.

7 LMS

På onsdag nästa vecka är det åter dags för Lunds Matematiska Sällskap. Då kommer vi få veta varför högst sju diagonaler skär varandra i en punkt i en regulär månghörning (utanför centrum).

Det skall bli mycket intressant.

8 Mer att läsa

På `www.matematikersamfundet.org.se` kan man nu ladda ner senaste utskicket från Svenska matematikersamfundet. I detta nummer finner man bland annat Lars Gårdings text om lämmelgåtan som har omnämnts tidigare.

Vad gäller Täljaren så har vi alla märkt att sommaren närmar sig. Det kommer säkert ett nummer i slutet av maj eller i början av juni, men sedan blir det uppehåll till c:a augusti.

9 Cyklar med många hjul

Som en uppgift till läsarna att klura på.

Ställ upp en funktion som beskriver priset $f(x, y)$ på en cykel, där x är antalet hjul och y antalet säten för passagerare. Givet är att $f(1, 1) = 995$, $f(2, 1) = 2995$ och $f(2, 2) = 13400$. Bestäm $f(1, 2)$, d.v.s. priset på en enhjuling med två sittplatser.

Om ni lyckas få eleverna att lösa uppgiften, skicka kopior på deras lösningar. Det vore intressant att få se. Om någon dessutom lyckas hitta ett pris på en enhjuling med två sittplatser (borde kanske finnas på en cirkus?) så är jag rätt nyfiken på det med.