Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

april 2007

Täljaren är en liten skrift om matematik och matematikundervisning. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet. Allt för att stimulera till eftertanke och kompetensutveckling. Alla bidrag är välkomna.

1 Ordvits

Jag måste börja med att rekomendera boken *Mathematical brain benders* av Stephen Barr[1] som jag köpte på Gleerups här i Lund. Av en händelse fick jag under det planlösa bläddrandet se frågan:

> *What is the longest sentence in two words in English?*

Vad tror du? Jag kunde inte motstå att fuska och titta i facit och se svaret. Dessutom är denna mening den *kortaste* jag kan komma på på engelska. Svaret var I do. Jag gick direkt till kassan med den boken.

Det finns många andra intressanta problem i boken att fundera över.

Vi tar en till: *Vad är det det största tal man kan bilda med 60 bokstäver?*

Svaret är:

> *Det största tal man kan bilda med sextio bokstäver plus ett.*

2 En otrolig bedrift

I Sydsvenskan, `http://sydsvenskan.se/varlden/article209411.ece`, skriver man om jättekaninen Robert. Bland annat nämns att jättekaninerna förökar sig fort.

> *Och de förökar sig fort: en kanin kan bli sextio på ett år.*

Jag är inte riktigt säker på hur *en* kanin kan lyckas med denna bedrift men låt oss icke gräva ner oss i det. Istället skall vi roa oss med att finna ett mönster i hur kaninen förökar sig.

Vi skall nu studera några olika modeller för hur kaninerna förökar sig.

[1]ISBN 0-486-24260-9

2.1 Modell 1

En frestande ansats är att en kanin får x ungar vid varje födsel. Startar vi med en kanin, den får ungar, varje unge får nya ungar, och dessa ungar får ungar i sin tur o.s.v., leder detta till den diofantiska ekvationen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = 60 \tag{1}$$

som skall lösas med avseende på n och x, där n är antal födseltillfällen. En lösning till denna orimliga ekvation är $x = 59$ och $n = 1$, d.v.s. att en kanin får 59 ungar på ett år och att ingen av kaninungarna hinner få några egna ungar.

För att finna fler lösningar skriver vi om (1)

$$x(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 59$$

59 är ett primtal så $x = 1$ eller 59. Vi har alltså även lösningen $x = 1$ och $n = 59$.

2.2 Modell 2

En annan tänkbar modell är att x_n är antalet kaniner i det n:te tidssteget. Om varje kanin kan föda f ungar så får vi rekursionsformeln

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + f x_n = x_n(1 + f) \end{aligned}$$

Vi vill då lösa ekvationen $x_N = 60$ vilket är ekvivalent med

$$60 = (1 + f)^N \tag{2}$$

Då $60 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3$ så har (2) ingen heltalslösning.

2.3 Modell 3

Den tredje modellen är att vi antar att det tar en viss tid för kaniner att kunna föda ungar. Låt oss dela in kaniner i ungar (a) och vuxna (b) och antaga att en vuxen kan föda f ungar. En indelning i diskreta tidssteg ger oss rekursionsekvationerna

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Den andra ekvationen tolkas naturligtvis som att morgondagens vuxna utgörs av dagens vuxna och barn. Om man vill kan ekvationerna skrivas på matrisform.

$$X_{n+1} = A X_n$$

där

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi skall istället ta fram en rekursionsformel. Låt $x_n = a_n + b_n$. Det ger

$$x_{n+1} = x_n + f x_{n-1} \tag{3}$$

eftersom $f x_{n-1} = f(a_{n-1} + b_{n-1}) = f b_n = a_{n+1}$ och $x_n = a_n + b_n = b_{n+1}$. Som startvärden för ekvation (3) kan vi antaga att $a_0 = 0$ och $b_0 = 1$ eller $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, d.v.s vi kan välja mellan att antaga att kaninen är gammal eller ung. Att antaga att den är ung leder dock i nästa steg till att den är gammal så vi kan lika gärna antaga att kaninen är ung. Vi har alltså $x_0 = 1$ samt $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $x_1 = 1$.

Ekvationen vi vill lösa är alltså

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + f x_{n-1} \\ x_0 = x_1 = 1 \\ x_N = 60 \end{aligned}$$

där f och N är de okända heltalen. $f = 1$ ger oss Fibonaccitalen och då 60 ej är ett Fibonaccital kan vi utesluta $f = 1$. Kvar att undersöka är då fallen för $f \leq 59$. Fallet $f = 59$ ger oss den triviala lösningen att den ensamma kaninen får 59 ungar.

För att undersöka de övriga fallen tar jag hjälp av en dator och Scilab[2] för att utföra beräkningen

```
for f=1:59,
     x=[1 1];
     n=2;
     while (x(n)<61)
         x=[x x(n)+f*x(n-1)];
         n=n+1;
         if (x(n)==60)
             f,
             x,
         end;
     end;
end
```

Resultatet blir lösningen vi redan kände till.

```
f  =  59.
x  =  1.    1.    60.
```

2.4 Modell 4

Nu är man ju även intresserad av att göra modellen mer realistisk. Det finns kanske en viss fördröjningstid innan en kanin kan föda ungar. Låt oss antaga att kaninerna delas in i nyfödda, a, barn, b och vuxna, c.

Vi kan formulera rekursionen som

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f c_n \\ b_{n+1} &= a_n \\ c_{n+1} &= b_n + c_n \end{aligned}$$

Antalet kaniner är $x_n = a_n + b_n + c_n$. Eftersom x_{n-2} är det samma som antalet vuxna som får nyfödda denna omgång (de övriga kaninerna är barn eller nyfödda som kommer att transformeras till vuxna respektive barn) så kommer rekursionsformeln vara

$$x_{n+1} = x_n + f x_{n-2}$$

Vi behöver fler startvärden här och sätter $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$ som ger $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Med Scilab koden

```
for f=1:59,
    x=[1 1 1];
    n=3;
    while (x(n)<61)
        x=[x x(n)+f*x(n-2)];
        n=n+1;
        if (x(n)==60)
            f,x,
        end;
    end;
end
```

får vi den vanliga lösningen med att få 59 ungar men vi får faktiskt en till!

```
f  =  1.
x  =  1   1   1   2   3   4   6   9
       13   19   28   41   60
```

Detta var ju trevligt så vi ställer upp en mer generell modell där vi har M antal barnlösa åldrar. Vi finner att vi får lösningar för $f = 1$ och $M = 2, 4, 14, 23, 31, 38, 44, 49, 53, 56, 58$ och därefter för varje heltal eftersom vi då har en vuxen som i lugn och ro kan producera ungar.

```
for M=1:100,
   for f=1:58,
      x=ones(1,M+1);
      n=M+1;
      while (x(n)<61)
         x=[x x(n)+f*x(n-M)];
         n=n+1;
         if (x(n)==60)
            print(%io(2),M,f);
         end;
      end;
   end;
end
```

Notera att vi sänkte 59 till 58 för att slippa den triviala lösningen.

Det verkar dock inte finnas lösningar för $f > 1$.

Uppgift 1 Läsaren uppmanas arbeta vidare med antagandet att den ensamma kaninen väntar ungar och att det därefter (helt orealistiskt) krävs två kaniner för att generera nya ungar. Kan du få fram 60 kaniner? Finns det lösningar för $f \geq 2$? Skicka in dina lösningar.

3 Aktuell debatt

Det har kommit ett förslag från utbildningsminstern om att de elever som läser de mer avancerade kurserna i matematik och språk skall premieras genom extra meritpoäng vid ansökan till högskolan.[3] Det har även kommit kritik mot detta.[4]

Kritiken verkar gå ut på följande

[2] www.scilab.org

[3] http://www.regeringen.se/sb/d/8542/a/77582;jsessionid=aMkQEF9t41d

[4] http://www.dn.se/DNet/jsp/polopoly.jsp?a=624033

- Små skolor kan ha svårt att få ihop lärare och tillräckligt många elever för kurserna.
- Elever på yrkesprogrammen har inte möjlighet att göra dessa tillval (poängantal).

Det senare argumentet känns lite konstigt, det förra löser sig själv genom att rektorer och politiker får börja leta efter kompetenta lärare. Då kanske de äntligen blir tvugna att börja betala vettiga löner? Förslaget som kritikerna kommer med är däremot bättre: gör det obligatoriskt att läsa dessa fördjupningskurser på gymnasiet och ha dem som förkunskapskrav till högskolan.

Jag håller med dem fullständigt i detta förslag till lösning.

Jan Sydhoff och Ceclila Bergström från skolverket tycker förstårs helt tvärtom.[5] De resonerar ju så här

> *Risken med att lägga ut ytterligare 100 poäng obligatoriskt i matematik för alla elever på NV är att vi förlorar elever som vill inrikta sig mot andra områden än matematik, naturvetenskap och teknik. Vi riskerar att färre elever väljer NV och därmed att antalet elever som läser mer matematik minskar.*

Detta svarar Anders Flodström, Olle Häggström och Jan-Eric Sundgren på[6]

> *Vad är i så fall vitsen med ett NV-program?*

4 LMS

I Lunds matematiska sällskap höll Magnus Fontes ett föredrag om Bourbaki. Det var intressant. Det roligaste tillfället var då det berättades att vid École Normale Supérieure i Paris utbildade man tidigare lärare (idag är det toppuniversitetet i Frankrike) och en åhörare undrade om man kunde jämföra det med Malmö Lärarhögskola. Det fnissades en del åt den jämförelsen.

Vi ser fram mot den 9 maj då Gert Almkvist håller föredraget "*Månghörningar*".[7]

5 Att färdas snabbt

Ponera att person A och B skall förflytta sig från a till b så snabbt som möjligt men endast en av dem har en cykel, och det går inte att skjutsa på den. Tanken är då att A börjar cykla för att sedan hoppa av cykeln vid ett strategiskt valt ställe. Från denna punkt går sedan A resten av vägen. B börjar gå och när B når cykeln kommer B cykla resten av sträckan.

Tänk vad skönt om denna teoretiska modell fungerade i verkligheten också och man kunde låta sin cykel stå olåst tills den andra personen nådde fram.

Hur mycket tid kan man spara på detta då? Vi antar att sträckan är 1 och att de promenerar med farten v_A respektive v_B och cyklar med farten c_A respektive c_B. Vi kan utan inskränkning antaga att A går långsammare än B och sätta upp olikheterna $v_A \leq v_B < \min(c_A, c_B)$. Det ger att den minimala tiden, om A cyklar hela sträckan är $\frac{1}{V_B}$, för att de båda skall komma fram.

Om A däremot växlar mellan gång och cykel efter sträckan s får vi följande uttryck för den totala tiden för A:

$$t_A = \frac{s}{c_A} + \frac{1-s}{v_A} \tag{4}$$

Tiden för B är

$$t_B = \frac{s}{v_B} + \frac{1-s}{c_B}$$

Ett krav vi har (och som är uppfyllt med våra förutsättningar) är att $\frac{s}{c_A} \leq \frac{s}{v_B}$, d.v.s. A måste ställa cykeln innan B tar den. Klart är även att det är som bäst ifall de kommer fram samtidigt, d.v.s. $t_A = t_B$. Om A kommer fram före B så hade det varit bättre om A ställt cykeln lite tidigare. Om B kommer fram före A så hade det varit bättre om A hade cyklar lite längre. $t_A = t_B$ ger

$$\frac{s}{c_A} + \frac{1-s}{v_A} = \frac{s}{v_B} + \frac{1-s}{c_B}$$

som ger

$$s = \frac{\frac{1}{v_A} - \frac{1}{c_B}}{\frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_A} - \frac{1}{c_A} - \frac{1}{c_B}} =$$

$$= \frac{(c_B - v_A)c_A v_B}{v_A c_A c_B + v_B c_A c_B - v_A v_B c_B - v_A v_B c_A}$$

Vi kan observera att $s > 0$. Det ger den totala tiden, enligt (4)

$$t_A = \frac{1}{v_A} + s\left(\frac{1}{c_A} - \frac{1}{v_A}\right) =$$

$$= \frac{1}{v_A} + \left(\frac{1}{c_A} - \frac{1}{v_A}\right) \frac{(c_B - v_A)c_A v_B}{v_A c_A c_B + v_B c_A c_B - v_A v_B c_B - v_A v_B c_A} =$$

$$= \frac{c_A c_B - v_B c_A - v_A v_B + c_A v_B}{v_A c_A c_B + v_B c_A c_B - v_A v_B c_B - v_A v_B c_A}$$

Det här uttrycket ser inte så roligt ut. Vi sätter $v_A = v_B = v$ och $c_A = c_B = c$. Det ger

$$t_A = \frac{c^2 - vc - v^2 + vc}{vc^2 + vc^2 - v^2c - v^2c} = \frac{c^2 - v^2}{2(vc^2 - cv^2)} = \frac{(c-v)(c+v)}{2vc(c-v)}$$

$$= \frac{c+v}{2vc} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right)$$

Medelhastigheten för resan är sålunda det harmoniska medelvärdet av hastigheterna ifall de går respektive cyklar med samma hastighet.

6 κappa 2007

I Theducations tävling för matematiklärare har andra frågan publicerats. Den lyder,

En oerhört lat gymnasist blir ombedd av sin sympatiske matematiklärare att gå till fönstret och räkna antalet smygrökande elever utanför och sedan skriva upp antalet på tavlan och sedan sätta sig på sin plats igen. En vägg består bara av fönster, och en vägg är helt belagd med skrivtavlor. På grund

[5] http://www.svd.se/dynamiskt/brannpunkt/did_9957188.asp
[6] http://www.math.chalmers.se/~olleh/skolans_sak/Skolverket_2.html
[7] http://www.matematik.lu.se/LMS

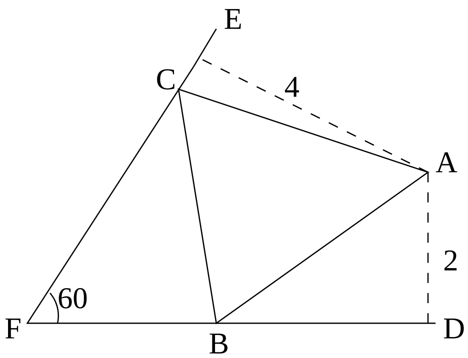
av nedskärningar så har man varit tvungen att dela av klassrummet så att vinkeln mellan fönsterväggen och tavelväggen är 60 grader. Gymnasisten befinner sig 2 m från fönstret och 4 m från tavlan.

Vilken är den kortaste sträcka eleven måste gå? (Inga föremål hindrar eleven att gå kortaste vägen.) Exakt svar med motivering krävs!

6.1 Svar

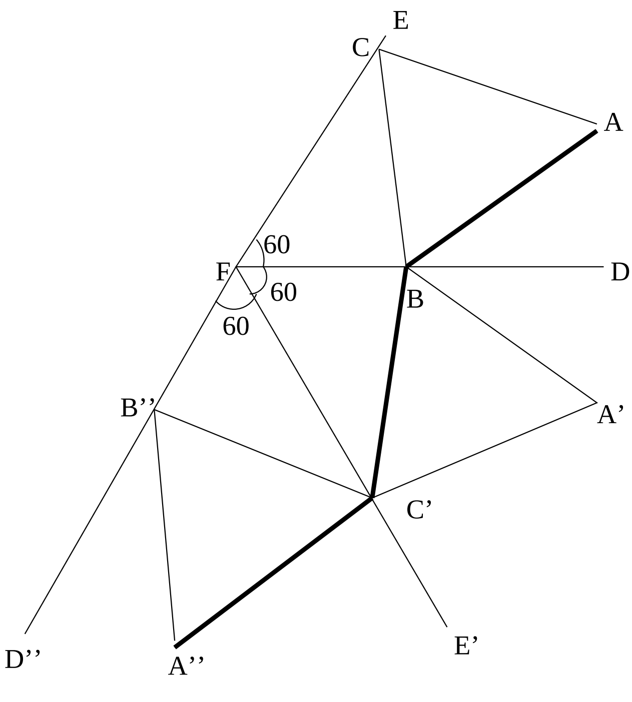
Den kortaste sträckan är $4\sqrt{7}$ m.

Situationen är som beskrivs i figur 1.



Figur 1: Fönstret utgörs av strålen FD, tavlan av FE. Eleven är placerad i A och uppgiften består i att bestämma punkterna B och C så att omkretsen av triangeln ABC är minimal.

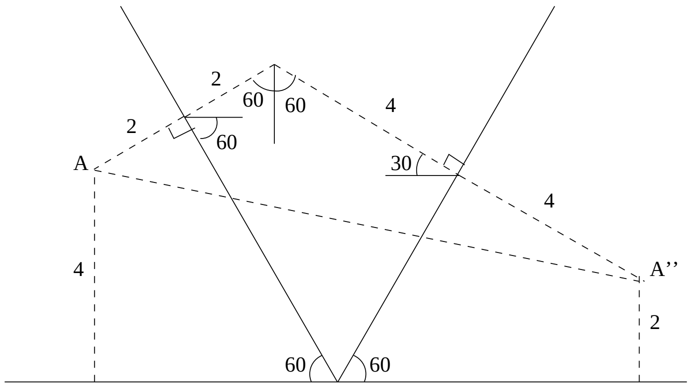
Den enklaste lösningen får vi om vi utför två speglingar. Först speglar vi allt i strålen FD och får då punkterna A', C' och strålen FE'. Sedan speglar vi dessa nya punkter i FE'och får då A'', B'' och strålen FD'', se figur [fig:2].



Figur 2: Resultatet av att spegla först i FD, där FE ger oss FE', och sedan spegla speglingen i FE'. Polygontåget $ABC'A''$ har markerats med tjockare streck.

Ur figuren får vi att den sökta omkretsen är exakt den samma som längden av polygontåget $ABC'A''$. Uppgiften var att minimera omkretsen vilket göres genom att låta $ABC'A''$ sammanfalla med den kortaste vägen, sträckan AA''. Punkterna B och C' utgörs därför av skärningspunkterna mellan sträckan AA'' och strålarna FD och FE'.

För att bestämma ett värde på denna sträcka tar vi bort allt oväsentligt i figuren samt roterar den, se figur [fig:3]



Figur 3: Samma figur men roterad och med väsentliga vinklar och sträckor markerade.

Cosinussatsen säger då att

$$|AA''| = \sqrt{4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{16 + 64 - 64 \cdot \frac{-1}{2}} = 4\sqrt{7}$$

7 Bevistekniker

Det finns många, här är några till

- Proof by example: The author gives only the case $n = 2$ and suggests that it contains most of the ideas of the general proof.
- Proof by omission: "The reader may easily supply the details" or "The other 253 cases are analogous"
- Proof by deferral: "We'll prove this later in the course".
- Proof by intimidation: "Trivial."

Källan till denna visdom är `http://www.maths.uwa.edu.au/~berwin/humour/invalid.proofs.html`.

8 Procent är svårt

Hört på dumburk om 3-års avtalet för handelsfacket "*Det blir 12,6 procent. 4,2 4,2 och 4,2 procent.*" I DN stod det *12,6 procent.* I SvD stod det *13,02 procent.*

Jag noterar att

$$1{,}042^3 = 1{,}1313661$$