Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

februari 2007

Täljaren är en liten skrift om matematik och matematikundervisning. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller skvaller om tossigheter som skett i klassrummet. Allt för att stimulera till eftertanke och kompetensutveckling. Alla bidrag är välkomna.

1 I förra numret

En av uppgifterna var att bestämma ett sätt att mäta rektanglar på, så att var och en av dessa tre rektanglar kan tolkas som den största:

A: 1x14 cm
B: 6x8 cm
C: 1x1 mm

Om vi mäter arean så blir B störst, Mäter vi omkretsen blir A störst. Alla vet vi att givet en fix omkrets så är den rektangel störst, den som är mest lik en kvadrat, d.v.s. kvoten mellan sidorna skall vara så nära 1 som möjligt. C är den rektangel som är störst med denna definition.

1.1 En felaktig sats

Problemet med satsen som jag tog upp i förra numret skall vi nu betrakta. Satsen löd

> I ekvationen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ är alla koefficienterna a_k reella tal. Om ekvationen har roten $z = a + bi$ så har ekvationen även roten $\bar{z} = a - bi$.

och problemet med formuleringen är att den inte kräver att $b \neq 0$. Om $x = a + 0i = a$ är en rot, så är $\overline{x} = \overline{a + 0i} = a$. Enligt förutsättningarna är $p(a) = 0$. Det satsen vill säga i så fall är att $p(\overline{x}) = p(a) = 0$ vilket trivialt är sant. Det innebär dock inte att det är en ny rot!

2 Math-club

På sajten `http://www.math-club.com/` kan man läsa om det hetaste i Hollywood just nu[1], math-club. De skriver om sig själva som

> *MATH-CLUB was formed to engage a group of LA's math-inclined people in analytical discussions in an easy going atmosphere.*

Och om folket som kommer till mötena skrivs

> *Similarly, people come to meetings with a wide range of math backgrounds. Some of the members have advanced degrees in math and have been published; some are recreational users of math. People do ask questions and explore the topic as a group. We kick off each meeting with a cocktail party.*

Det låter ju som en trevlig verksamhet. Kanske en trend som man borde haka på? Vi har ju Lunds Matematiska sällskap med förfriskningar före mötena, men på något sätt låter cocktailparty lite mer raffinerat.

3 Årets tävling för matematiklärare

Den finns på `http://www.math.su.se/kappa2007/`. Första problemet borde inte ge några större problem. Man kan som utvidgning fundera över vad som händer om man tillåter växling, d.v.s att man kan få tillbaka poletter från kassören för att man skall kunna betala det exakta beloppet.

Om man vill kan man fråga sig vad som gäller allmänt ifall man vill ha ett system med fler olika valörer på poletterna.

4 Rationellt eller ej?

Hur visar man att

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{9}} \tag{1}$$

inte är rationellt? Med ett räknehjälpmedel som klarar av att visa fler värdesiffror än vad en enkel miniräknare klarar av kan man plocka fram fler värdesiffror, men det är ändå ingen garanti för att det inte är ett rationellt tal. Perioden i decimalutvecklingen skulle ju kunna vara så pass stor att ingen dator av idag eller av morgondagens modell klarar av att hålla reda på alla decimalerna.

$$1.3189\,3189\,3$$

Är det ett rationellt tal? Det ser ju ut som det.

För att visa detta har vi att ekvation (1) är det samma som

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}$$

så vi ställer upp hypotesen att uttrycket är rationellt och $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{a}{b}$ där a och b är positiva, relativt prima heltal. Vi får genom kvadrering att

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

[1] I allafall om man får tro http://www.mediabistro.com

Lite omskrivningar ger att

$$\sqrt{2} = \frac{4b^2}{3\left(2a^2 - b^2\right)}$$

d.v.s. $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal, vilket är omöjligt. Alltså kan inte uttrycket vara rationellt.

Nästa intressanta fråga är då hur man hittar fler liknande uttryck som enligt miniräknaren verkar vara rationella. Förslag önskas från läsarkretsen.

5 Saker från internet

Här finns en stor samling länkar som kan vara av intresse. `http://svemat.kevius.com/svmart.html`

Även följande "nyhet" är intressant `http://www.sr.se/norrbotten/nyheter/artikel.asp?artikel=1125809`.

> *Det nya sättet att läsa matte går ut på att eleverna på högstadiet fördjupar sig i en del av matematiken åt gången. Det traditionella sättet att läsa matte är annars att följa en bok, och endast ägna varje del en kortare tid för att repeteras i följande årskurs.*

Det låter intressant.

5.1 SI-systemet

På `http://www.freedom2measure.org/` hittar man en länk med den festliga rubriken "Our way of measuring is under threat"

Det finns en hel del personer som verkar ha ett personligt hat gentemot SI-systemet. Argumenten mot SI kan baseras på att det är svårt att läsa av millimetrar på en linjal med dm,cm och mm-markeringar men inte svårt att läsa av tumindelningar med alla deras bråk. Ett mycket djupt argument. På sätt och vis har tummen fördelen att de (kanske?) tränar användaren på bråkräkning, men att beskriva storleken på processerna inom datorindustrin som det approximativa värdet

$$\frac{60873}{17179869184}\text{ tum}$$

känns lite ogästvänligt.

Det argumenteras även om att

> *Thus, base ten enters the Centigrade/Celsius system only in that there are 10 times 10 degrees between the freezing and boiling point of water. This is an utterly arbitrary way of fixing the size of a degree.*

$100°$F motsvarar väl temperaturen i en viss kroppsöppning? Jag vet inte vilket som känns mest godtyckligt.

> *Furthermore, since the size of a degree Fahrenheit is smaller that that of a degree Centigrade, when describing the temperature around us Fahrenheit is more accurate!*

km/h är med samma argument en bättre enhet än mph. Fast å andra sidan är det trevligt att prata om tum när man pratar virke.

6 Dividera aldrig med noll

Enligt artikel hos BBC [2] så har Dr James Anderson vid datavetenskapliga institutionen vid universitetet i Reading löst ett otroligt viktigt problem nämligen *ingenting*.[3] Han säger att det vore ju illa ifall man fick en division med noll i någon livsviktig datorfunktion, t.ex. landningssystem i flygplan, avfyrningskontrollen för kärnvapen, etc. Sådant hanteras redan idag. Men vi skall se vad J.A. har kommit fram till.

Han introducerar något som kallas *nullity*. Det är ett något som ligger utanför den vanliga tallinjen, ungefär som det komplexa talplanet utökas med ∞. Nullity betecknas med en symbol som liknar Φ, det är dock inte Φ men jag använder den här av typografiska skäl. Han kallar nullity för ett tal.

Han definierar

$$\Phi = \frac{0}{0}$$

och

$$\infty = \frac{1}{0} \qquad -\infty = \frac{-1}{0}$$

Redan här börjar man ju undra, men låt gå för stunden så får vi se vad det leder till. Det han anser vara den stora bedriften är att visa att

$$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1} =$$
$$\left(\frac{0}{1}\right)^1 \left(\frac{1}{0}\right)^1 = \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0} = \Phi$$

Varför gör han inte förenklingen till $\frac{1}{1}$ istället? Eller i uträkningen

$$-\infty = \frac{-1}{0} = \frac{-1 \cdot -1}{0 \cdot -1} = \frac{1}{-0} = \frac{1}{0} = \infty$$

kan man fråga sig vad som är fel. Problemet är att de vanliga räknelagarna inte gäller. Allt måste hanteras på den speciella standardform som han pratar om i andra papper han skrivit.

Det är dock ingen rolig läsning för den som inte vill ge upp det man är van vid. Att utvidga $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ för $x \neq 0$ till

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

kallas "*...harmful extension*". Jag vill nog hellre kalla hans förslag om att introducera $\frac{0}{0}$ som Φ som farligare. Då kommer $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$ fortsätta vara 0 medan $\frac{0^2}{0} = \Phi$. Likaså kommer $\frac{\sin kx}{x}$ inte längre närma sig k då $x \to 0$ utan det kommer alltid vara Φ.

Att $f(x) = \frac{1}{x}$ närmar sig $-\infty$ respektive ∞ beroende på vilket håll man närmar sig på löses genom att angripa att man tänker på kontinuitet (vilket det väl inte handlar om här?). Istället vill han definiera

$$f(x) = \begin{cases} \{-\infty, \infty\} & \text{om } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{annars} \end{cases}$$

Jag begriper inte. Ett lysande citat från texterna är

[2] http://www.bbc.co.uk/berkshire/content/articles/2006/12/06/divide_zero_feature.shtml?comment=response#comment

[3] "*says his new theorem solves an extremely important problem - the problem of nothing.*"

> "*It is important to note that where equations describin some physical system naturally incorporate terms of the form x^2/x, cancelling x to give* $f(x) = x$ introduces *a singularity where no singularity existed before the arithmetical simplification.*
> "

Om någon läsare begriper det där så vänligen förklara det för mig.

I princip är det ju inte fel i att utvidga och hitta på nytt, om det är konsistent och fungerar, men jag tycker följande känns korrekt

$$0 = 0^{2-1} = 0 \cdot 0 \cdot 1/0 = 0 \cdot 1/0 = 0/0 = \Phi$$

vilket inte gäller enligt hans system. Det finns andra sätt att försöka komma till rätta med division med noll. En del lyckas, en del lyckas inte. Φ verkar vara av den senare sorten eftersom det sätter så många käppar i hjulen för analysen.

På en annan av hans sidor kan jag läsa

> "*This site contains mathematical formulas for the perspex machine and for properties such as feeling, consciousness, and free will.*"

Därmed behöver jag inte fler bevis för att det är bra glömma det här pajaseriet. Lite sökning på nätet visar att han är allmänt klassificerad som pajas.

7 Bevistekniker

Vi avslutar med lite tips på hur man bevisar matematiska påståenden.

> "This is a one line proof...if we start sufficiently far to the left."

Helt korrekt!

- Proof by vigorous handwaving: Works well in a classroom or seminar setting.
- Proof by forward reference: Reference is usually to a forthcoming paper of the author, which is often not as forthcoming as at first.
- Proof by funding: How could three different government agencies be wrong?

Alla har vi väl sett dessa metoder användas?

8 TV och vika papper

Det är inte ofta man ser något intressant på TV men vi har ju faktiskt haft "Fråga Lund" för många år sedan. På senare tid är det nog programmet "Mythbusters"[4] där Jamie och Adam testar olika myter, som får räknas till de intressanta. Senast testades huruvida man kan vika ett papper på mitten mer än 7 gånger. Myten är löjlig ur en teoretisk synvikel, med ett tillräckligt stort papper och tillräckligt gott om kraft kan du vika hur mycket du vill (men proportionerna blir då ännu löjligare än själva påståendet). Ur en praktisk synvinkel stämmer det dock väl. Även ett papper på 1m^2 är hopplöst att försöka vika mer än 7 gånger. Arean på pappret halveras i varje vikning och tjockleken dubbleras. Det är alltså exponentiellt avtagande/tillväxt vilket borgar för en snabb katastrof (sker vid 7). I programmet lyckas de dock vika ett papper, med dimensionerna 51×66m, *elva* gånger med hjälp av gaffeltruck och vägvält.

Jag ber att få återkomma med mer om pappersvikning i nästa nummer.

[4] På http://www.discovery.com finns mer info.