Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

januari 2007

Täljaren är en liten skrift om matematik och matematikundervisning. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller skvaller om tossigheter som skett i klassrummet. Allt för att stimulera till eftertanke och kompetensutveckling. Alla bidrag är välkomna.

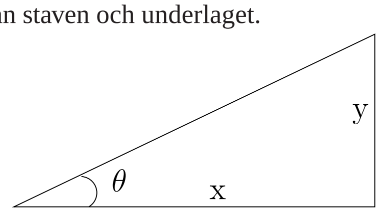
1 Äntligen matematik!

Det är titeln på senaste numret av "Folkvett" som damp ner i min brevlåda nyligen. Jag kan varmt rekommendera denna tidskrift. Där skriver Kimmo Eriksson om hur matematik används av dem som inte vet vad de håller på med. *Pseudomatematik* kan kanske vara ett bra namn där matematiken används för matematikens skull för att det skall verka "vetenskapligt" utan att skribenten egentligen vet vad du håller på med. Jag rekommenderar Folkvett starkt! Den kommer finnas tillgänglig på www.vof.se om ett par månader.

Det står massor av annat vettigt i den också, så den är läsbar av många anledningar. Du som inte prenummererar på den uppmanar jag genast till att göra bot och bättring.

1.1 Äpplen och päron

I "A foot by any other name" i den traditionella kolumnen "Fallacies, Flaws and Flimflam" av Ed Barbeau i *The College Mathematics Journal*, (Vol 29, No 1, Jan 1998, p 34) finns ett intressant exempel. Eftersom jag är anhängare av SI-enheter tänker jag begagna mig av dessa men ändå behålla andemeningen i artikeln. Luta en 1m lång stav mot väggen. Låt x vara det horisontella avståndet från väggen till stavens ände och y vara det vertikala avståndet. Vinkeln θ är vinkeln mellan staven och underlaget.



Problemet är att finna vinkeln θ som ger det största värdet på uttrycket $x^2 + y$.

Vi har att $x = \cos\theta$ och $y = \sin\theta$ som ger

$$x^2 + y = \cos^2\theta + \sin\theta = 1 + \sin\theta - \sin^2\theta =$$

$$\frac{5}{4} - \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2$$

För $\theta = \frac{\pi}{6}$ får vi ett maximum.

Nu mäter vi i decimeter istället och får $x = 10\cos\theta$ och $y = 10\sin\theta$ som ger

$$x^2 + y = 100\cos^2\theta + 10\sin\theta = 100 + 10\sin\theta - 100\sin^2\theta =$$

$$\frac{401}{4} - \left(10\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2$$

som ger ett maximum för $\theta = \arcsin\frac{1}{20}$ som är en helt annan vinkel än $\frac{\pi}{6}$.

Alla inser det konstiga med att vi får olika resultat beroende på vilken måttenhet vi använder. Det som ställer till det är att vi adderar en area (x^2) och en längd (y).

Äpplet är x^2 och päronet är y. En summering av dessa ger en fruktcoctail av inkonsistent fysikalisk dimension. Detta borde visa behovet av att förstå matematik. I senaste numret av Folkvett omnämns just ett fall där en person hade gjort något liknande och då detta kritiserades blev svaret inte nådigt. Läs artikeln!

Matematikern Sten Kaijser har föreslagit att varje tidning bör ha en siffergranskare utöver sedvanliga redigerare. Jag anser mig vara en hyffsat god siffergranskare men en dålig redigerare.[1]

1.2 Uppgift till läsaren

Givet är rektanglarna med måtten

A: 1x14 cm

B: 6x8 cm

C: 1x1 mm

Bestäm tre olika någorlunda vettiga(?) sätt att avgöra vilken av dem som är störst så att du kan få var och en av dem att bli störst.

2 Fallacies, Flaws and Flimflam

I tidskriften *College Mathematics Journal* finns som sagt var en kolumn med titeln "Fallacies, Flaws and Flimflam". Där finns många exempel på konstigheter av olika slag. En del kräver rätt mycket eftertanke.

Jag blev inspirerad och tänkte därför ge läsarna en liten utmaning med en tanke som slog mig.

Följande sats lär du ha sett i dina studier.

Sats 1 I ekvationen $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ är alla koefficienterna a_k reella tal. Om ekvationen har roten $z = a + bi$ så har ekvationen även roten $\overline{z} = a - bi$.

Beviset är tämligen direkt. Vi har att $\overline{a_k} = a_k$ för alla k eftersom de är reella tal. Vidare gäller $\overline{x}^n = \overline{x^n}$. Vi har alltså att $p(z) = 0$. Nu beräknar vi

$$p(\overline{z}) = \sum a_k\overline{z}^k = \sum \overline{a_k}\cdot\overline{z^k} = \sum \overline{a_kz^k} = \overline{\sum a_kz^k} = \overline{p(z)} = 0$$

Där med är satsen bevisad.

Då kan vi bevisa följande sats

[1] Jag tror visst att hyfsat stavas med ett f t.ex.

Sats 2 Om polynomekvation $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, där alla a_k är reella, har en reell rot $x = \alpha$ så är det en dubbelrot.

Detta visar vi genom att använda föregående sats. Den säger att isåfall är även $x = \overline{\alpha}$ en rot. Eftersom α är reellt så är $\overline{\alpha} = \alpha$ och vi har alltså en dubbelrot.

Nu är vi redo att visa följande sats

Sats 3 Ekvationen $x - 4 = 0$ har en dubbelrot.

Eftersom $x = 4$ är en rot så är det även en dubbelrot eftersom den uppfyller alla kriterierna i föregående sats.

Detta resultat strider mot andra resultat som brukar läras ut i samband med att man tar upp de komplexa talen, t.ex. att en n-te gradsekvation har exakt n lösningar, medräknat eventuell multiplicitet.

Så, vad är felet? Lösning kommer i nästa nummer! Alla läsare uppmanas att skicka in förslag på vad som kan vara fel.