Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

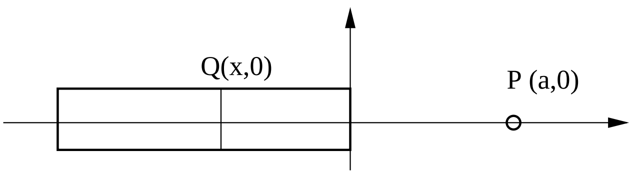
november 2006

1 Gravitation

I förra Täljaren behandlades en fråga om gravitationen. Jag tänkte fortsätta på det spåret här. Det säges, när man beräknar gravitationskrafter för klot, att man kan behandla dessa som punktmassor. Bland annat detta skall vi visa. Men först tar vi ett par exempel med enklare figurer än klot.

1.1 Tråden

Det allra enklaste fallet utgörs av en tunn tråd, med längden L och längddensiteten ρ, som visas i figuren.



Figur 1: Tunn tråd med längden L och koordinatsystem placerat längs tråden med origo i högra änden. Bilden visar en tjocklek hos tråden för att förtydliga.

Kraften som verkar på punkten P i $(a, 0)$ med massan 1 är då för ett litet masselement i Q med utsträckningen dx[1]

$$dF = \frac{\rho dx}{(a-x)^2}$$

Den totala kraften är då

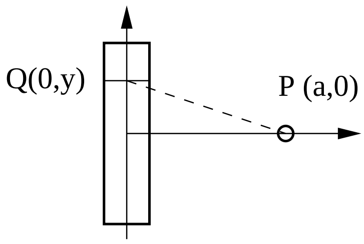
$$F = \int_{-L}^{0} \frac{\rho dx}{(a-x)^2} = \rho \left[\frac{1}{a-x} \right]_{-L}^{0} = \rho \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) =$$

$$= \rho L \frac{1}{a(a+L)}$$

Hade man försökt ersätta tråden med en enda masspunkt med massan ρL och placerad i trådens mittpunkt så hade det inte gett samma gravitationskraft, ty denna är

$$\rho L \frac{1}{\left(a + \frac{L}{2}\right)^2}$$

Vi undersöker även fallet med den lodräta tråden, med längd L och längddensiteten ρ.



Figur 2: Tunn tråd med längden L. Koordinatsystemets y-axel ligger längs tråden och origo är placerat i centrum av tråden.

Här har vi att gravitationskraften från punkten Q till P har både en x- och en y-komponent. Dock är y-komponenterna symmetriska i den meningen att elementet i $(0, y)$ ger ett motriktat bidrag till den kraft som elementet i $(0, -y)$ ger. Kraften som elementet i Q ger upphov till på P är

$$dF = \frac{\rho dy}{a^2 + y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{a\rho dy}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

Den totala kraften är

$$F = a\rho \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

För att beräkna integralen använder vi substitutionen

$$y = a \sinh t$$
$$dy = a \cosh t$$

som ger

$$\int \frac{dy}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} = \int \frac{a \cosh t \, dt}{\left(a^2 + a^2 \sinh^2 t\right)^{3/2}} =$$

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{\cosh t \, dt}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cosh t \, dt}{\cosh^3 t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cosh^2 t}$$

Där vi utnyttjade $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ och att $\cosh t > 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Vidare är

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{a^2} \int \left(1 - \tanh^2 t\,\right) dt = \frac{\tanh t}{a^2}$$

Eftersom $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$ och $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Detta ger även att $\tanh t = \frac{\sinh t}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}}$ som ger den slutgiltiga integralen, där $\sinh t = \frac{y}{a}$

$$F = a\rho \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}} = a\rho \cdot \left[\frac{1}{a^2} \frac{y/a}{\sqrt{1 + y^2/a^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} =$$

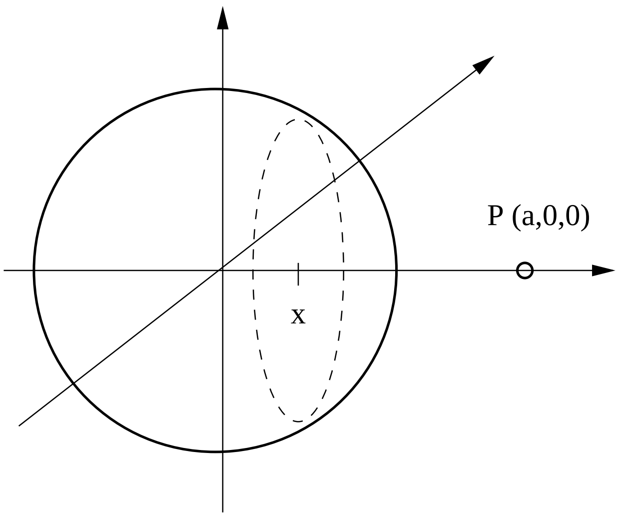
$$\frac{\rho}{a} \left(\frac{L/2}{\sqrt{a^2 + L^2/4}} - \frac{-L/2}{\sqrt{a^2 + L^2/4}} \right) = \frac{\rho L}{a\sqrt{a^2 + L^2/4}}$$

En förenkling genom att endast arbeta med mittpunkten på tråden ger tyngdkraften $\rho L / a^2$

[1] Detta dx är inte samma som återfinns i integralen eftersom det är endast ett symboliskt skrivsätt. Detta dx är en längd, och vi tänker oss en summa över alla elementen där vi låter längden av $dx \to 0$.

1.2 Klotet

Koordinatsystemets origo placeras i centrum av klotet med radien R. I punkten $P(a, 0, 0)$ på x-axeln placerar vi en punkt med massan 1. Av symmetriskäl kommer gravitationskraften som verkar på P ha en resultant som endast utsträcker sig i x-led.



Figur 3: Klotet med radien R. En cirkelskiva med x-koordinaten x är utmarkerad. Den ligger i yz-planet. Klotets densitet är ρ.

Vi bestämmer kraften på ett element i cirkelskivan rill

$$dF = \frac{\rho dxdydz}{(a-x)^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}}$$

eftersom vi måste projicera kraften till att vara parallell med x-axeln. Den totala krafen är då

$$\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{\rho(a-x)\, dxdydz}{\left((a-x)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Men för att göra det lite lättare betraktar vi en cirkelskiva Ω_xi yz-planet med x-koordinaten x. I denna cirkelskiva använder vi polära koordinater och sätter $r^2 = y^2 + z^2 = R^2 - x^2$. Vi får

$$F = \int_{x=-R}^{x=R} \int\int_{\Omega_x} \frac{\rho(a-x)\, dxdydz}{((a-x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$\int_{-R}^{R} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\rho(a-x) r\, dr d\theta dx}{((a-x)^2 + r^2)^{3/2}} =$$

$$2\pi\rho \int_{-R}^{R} (a-x) \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{r\, dr}{((a-x)^2 + r^2)^{3/2}} dx =$$

$$2\pi\rho \int_{-R}^{R} (a-x) \left[\frac{-1}{((a-x)^2 + r^2)^{1/2}} \right]_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$$2\pi\rho \int_{-R}^{R} (a-x) \left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ax + R^2}} \right) dx =$$

och då $a > x$

$$2\pi\rho \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ax + R^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - 2ax + R^2}} \right) dx =$$

Vi inflikar med att

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{b - kx}} = -\frac{2x\sqrt{b-kx}}{k} - \frac{4\sqrt{b-kx}^3}{3k^2}$$

vilket erhålls med partialintegration, som ger

$$2\pi\rho \left(2R + \left[\sqrt{a^2 - 2ax + R^2} - \frac{2x\sqrt{a^2 + R^2 - 2ax}}{2a} - \frac{4\left(a^2 + R^2 - 2ax\right)^{3/2}}{3(2a)^2} \right]_{-R}^{R} \right) =$$

$$2\pi\rho \left(2R + \underbrace{\sqrt{(a-R)^2} - \sqrt{(a+R)^2}}_{-2R} - \frac{2R\sqrt{(a-R)^2}}{2a} + \frac{-2R\sqrt{(a+R)^2}}{2a} - \frac{\sqrt{(a-R)^2}^3}{3a^2} + \frac{\sqrt{(a+R)^2}^3}{3a^2} \right) =$$

$$2\pi\rho \left(\frac{-Ra + R^2 - Ra - R^2}{a} - \frac{(a-R)^3 - (a+R)^3}{3a^2} \right) =$$

$$2\pi\rho \left(-2R - \frac{-6a^2R - 2R^3}{3a^2} \right) = \frac{4\pi\rho R^3}{3a^2} = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \cdot \frac{1}{a^2}$$

Den sammanlagda gravitationskraften motsvarar sålunda kraften som en punktmassa med samma massa $\left(\frac{4\pi\rho R^3}{3}\right)$, som placeras i det ursprungliga klotets centrum, ger upphov till.

1.3 Kuben

Som avslutning tänker vi oss en kub med sidan $2L$ vars centrum placeras i koordinatsystemets origo och så att alla kantlinjer är parallella med minst en en koordinataxel. Vi ställer upp den sedvanliga integralen

$$F = \int_{-L}^{L} \int_{L}^{L} \int_{L}^{L} \frac{\rho(a-x)\, dxdydz}{\left((a-x)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} =$$

$$\int_{-L}^{L} \int_{-L}^{L} \left[\frac{\rho}{((a-x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-L}^{L} dydz$$

Med Maple beräknas resten och resultatet upptar minst en A4 sida. Dock kräver det närmre analys då man erhåller faktorer så som $\sqrt{-(a+L)^2}$med datorns hjälp.

2 Bra-att-ha integraler

Vi försöker minnas att

$$\int \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y}{a^2\sqrt{a^2 + y^2}}$$

och att de hyperboliska funktionerna är väldigt trevliga.

3 NCM

På NCMs hemsida (`http://ncm.gu.se/node/1420`) finns idag, lördag 28 oktober 2006, en nyhet som får en att tänka på ironi. Rubriken för sidan är

> "*Nationellt Centrum för Matematikutbildning*"

och man kan läsa om hur det läggs fram förslag om satsning på matematik från regeringen för

> *2,05 miljarder kr (*$350 + 750 + 950$ *kkr)*

och från socialdemokraterna

> *1 miljard för perioden 2007-2009 (*$250+250+500$ *kkr)*

Någon behöver utbildas i enhetsanvändning tror jag bestämt! Vid närmare granskning visar det sig att det är personen som skrev nyheten på NCMs webbsida. Ridå!

4 Pedagoja

I en artikel i Hallandsposten kunde man för en tid sedan läsa följande siffror

År	Andel IG på NP	Andel IG i betyg
2002		11,6%
2003	23%	2,6%
2004	31%	2,1%
2005	35%	0%

Tabell 1: Andelen IG på nationella provet i matematik samt avgångsbetygen för tre Halmstadskolor.

I en artikel i Öresundsposten (länk finns på ncm.gu.se) kunde man läsa om liknande tendenser. Det är min fasta övertygelse att det tänjs för mycket på gränserna för matematikbetygen i 9:an. När dessa elever sedan kommer till gymnasiet möter lärarna elever som verkligen inte visar upp några kunskaper inom matematik, trots att betyget säger annorlunda.

Tanken är att ett G i betyget skall innebära att eleven har en viss kunskap, men detta kan man inte längre lita på. Då frågar man sig vad meningen med betygen är?

För att återgå till situationen i Halmstad så ställer jag mig frågan:

> *Kan det vara så att rektorerna har fått kritik för att det har varit så många IG i slutbetyg? Är det möjligt att lärarna då har läxats upp med kravet:* "Fler skall få G"*? Är det möjligt att lärarna då har använt några helt oanade revolutionerande metoder för att få den tredjedel av eleverna, som fick IG på provet, att få G i slutbetyg på bara en månads tid? Eller är det så att det har satts G på väldigt lösa grunder?*

Om någon har en rimligare förklaring än den sista slutsatsen så hör av dig!

Likvärdighetsarbetet är viktigt, dessvärre görs lite åt detta och lärarkåren drar åt olika håll. Vissa resonerar som så att man får inte ställa för höga krav (kräva för många poäng på proven?) för då får man så många underkända. Men om de inte har kunskaperna som krävs då?

På denna punkt är jag ganska binär, antingen har man de kunskaper som krävs eller har man det inte. Något mellanting finns inte att bekymra sig om, i alla fall inte då det gäller betyget G.[2] Det skall vara ställt utom rimligt tvivel att eleven har kunskaperna för att få ett G.

Då kommer återigen frågan om var gränsen skall ligga för godkänd. Den absolut största arbetsbesparande insats som kan göras tror jag är att det finns betydligt fler prov som kommer från en central myndighet och att dessa prov sätter betygen. Kanske ett prov som markerar G och sedan andra prov och kanske även muntliga förhör för högre betyg? Kanske finns ett bättre sätt? Ett mycket intressant problem är det iallafall.

5 Lektion.se

Jag har tagit kontakt med sajten `http://lektion.se` som samlar lektionsmaterial för lärare för att se om man kan sprida Täljaren via denna. Ja, målet är att ha tusentals läsare som även är aktiva med att skicka in material, förslag, funderingar och annat för publicering och spridning till kollegor över hela världen. Det har kanske varit lite för mycket integraler på sistone, men de är rätt kul, faktiskt.

Det finns lärare som fortfarande är roade av matematik och kan behöva lite stimulans för att inte dövas helt av A-kursen i matematik.

[2] Svagheter kan kompenseras med styrkor i andra aspekter för de högre betygen.