Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

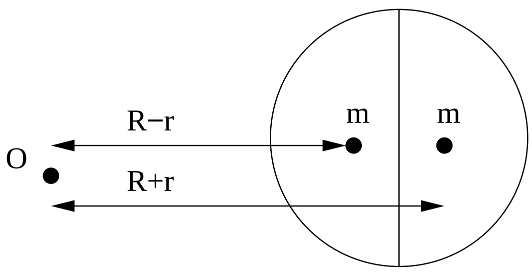
september och oktober 2006

1 Gravitation

A. Dessmark ställde en fråga om ett paradoxalt resultat då det gäller gravitationskrafter. Om vi tänker oss en kropp med massan $2m$ så är gravitationskraften proportionerlig mot

$$\frac{2m}{R^2}$$

där R är avståndet från kroppens tyngdpunkt till en referenspunkt O. Vi delar därefter upp kroppen i två lika delar enligt figur 1.



Figur 1: Kroppen delad i två delar med varsin tyngdpunkt.

Kroppens delars tyngdpunkter ligger symetriskt på avståndet r från den tidigare gemensamma tyngdpunkten vilket ger en gravitationskraft som är proportionerlig mot

$$\frac{m}{(R+r)^2} + \frac{m}{(R-r)^2} = 2m\left(\frac{R^2+r^2}{(R+r)^2(R-r)^2}\right)$$

som vi förenklar till

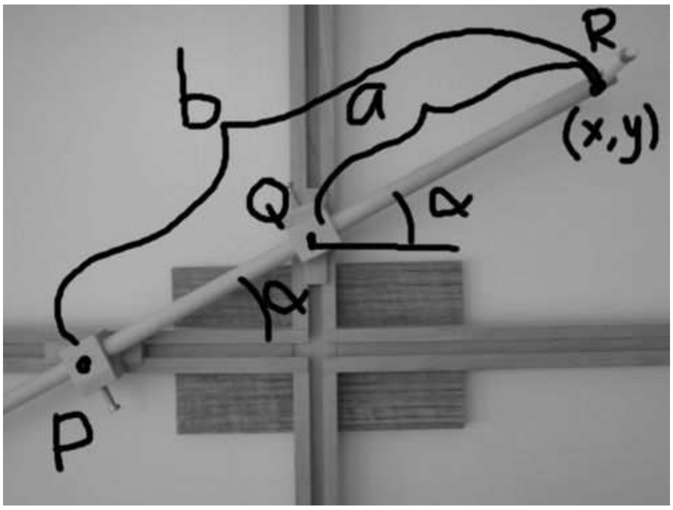
$$\frac{2m}{R^2}\left(\frac{1+\gamma^2}{(1-\gamma)^2}\right) > \frac{2m}{R^2}\left(1+\gamma^2\right) > \frac{2m}{R^2}$$

där $\gamma = r/R > 0$. Innebär detta att gravitationskraften har ökat?

Problemet med resonemanget är att Newtons gravitationslag gäller för punktmassor. För ett homogent klot gäller (tror jag) att gravitationskraften kan ersättas med gravitationskraften på tyngdpunkten. När klotet delas erhålls inte klot utan kroppar där man inte kan reducera varje bidrag till gravitationskraften från de små delarna, som utgör hela kroppen., till en enda kraft som har sin angreppspunkt i delens tyngdpunkt.

2 Rita en ellips

Det klassiska sättet för detta är ju att använda ett snöre samt två spikar, men jag valde en annan modell.



Figur 2: Ellipsritare. I R är en penna fastmonterad och punkterna P och Q kan förflytta sig horisontellt respektive vertikalt i spåren.

I figuren har vi två korslagda träbitar med spår som utgör det naturliga valet av koordinatsystemet vi fäller in i bilden. Punkten R's koordinater blir då $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$. Detta är villkoren för en ellips eftersom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\alpha}{b^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

2.1 Problem till läsaren

Att konstruera ett sätt så att man kan fräsa till en elliptisk form på ett säkert sätt med hjälp av en vertikalfräs eller ett vanligt fräsbord med en fastmonterad fräs.

Jag skulle kunna använda någon av ovanstående metoder, men önskar samtidigt kunna flytta arbetsmaterialet från fräsen ifall det uppstår problem. Detta gör att snörmodellen inte fungerar och att byta pennan mot en fräs i ovanstående uppställning uppfyller inte detta säkerhetskrav.

3 Finländska studentskrivningar

På `http://www.hbl.fi/pagespeed/url/static/static/nyheter/stexH6/stex.html` finns de finska studentskrivningarna från hösten 2006. Bland annat finns där skrivningar för den långa kursen och den korta kursen i matematik. För att fylla ut så lägger jag in proven här.

Bedömningsanvisningar vore trevligt om man kunde hitta också. Till varje prov gäller att högst 10 uppgifter får lösas.

3.1 Kort kurs

1. Lös ekvationerna a) $x+2(4+x) = -1$ b) $\frac{5+x^2}{x} = \frac{5x-13}{3}$

2. Två punkter $A = (2, 6)$ och $B = (1, -1)$ är givna. Bestäm a) ekvationen som går genom punkterna A och B, b) längden av sträckan AB c) koordinaterna för mittpunkten på sträckan AB.

3. Hur mycket 2-procentig desinfektionslösning behövs för att den skall kunna spädas ut till 500 ml 0,35-procentig lösning?

4. En abiturent har två väckarklockor. Den nyare av dem fungerar rätt med 98% sannolikhet och den äldre med 85% sannolikhet. På kvällen före provet i matematik sätter abiturienten bägge klockorna på ringning följande morgon. Vilken är sannolikheten för att att a) båda klockorna, b) bara den ena klockan, c) ingen av klockorna ringer korrekt?

5. Vid rengöring av takrännor på en villa användes en stege med ställbar längd. När stegen var fem meter lång och rest mot en lodrät vägg, så att den nedre ändan stod 150 cm från väggen, låg stegens övre ända precis en meter för lågt. Hur mycket måste stegen förlängas, om den nedre ändan står kvar på samma ställe? Ge svaret med en centimeters noggrannhet.

6. Kostnaderna för uppvärmning av ett hus vid köld är direkt proportionella mot skillnaden mellan temperaturen inne i huset och temperaturen utanför. När temperaturen är $-2{,}0°$C ute och $22{,}0°$ C inne, sänks innetemperaturen till $21{,}0°$C. Med hur många procent sjunker då uppvärmningskostnaderna?

7. Laura går till skolan på 15 minuter. Oftast kommer hon fram när klockan ringer. En morgon startar hon 6 minuter senare än vanligt, och fastän hon skyndar sig kommer hon för sent. När klockan ringer har hon ännu 5% av vägen kvar. Hur många procent snabbare än vanligt har hon då gått?

8. I en rätvinklig triangel har hypotenusan längden 12,4 cm och den ena spetsiga vinkeln är $64{,}5°$. Triangeln roterar runt den längre av kateterna. Beräkna volymen av den kon som bildas. Beräkna också mantelytans area.

9. Vi betraktar funktionen $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ i intervallet $[-1, 4]$. a) Bestäm funktionens största och minsta värde i det givna intervallet och rita funktionens graf. b) Bestäm riktningskoefficientens största och minsta värde för en tangent till kurvan $y = f(x)$ i det givna intervallet.

10. Grafen till ett andragradspolynom $y = ax^2 + bx + c$ går genom punkterna $(0, 0)$, $(1, 2)$ och $(4, 3)$. Bestäm koefficienterna a, b och c, och rita polynomets graf. Bestäm polynomets derivata när $x = 2$.

11. a) Hur många olika sittordningar kan åstadkommas i ett klassrum med 30 elever och 30 bänkar? b) På hur många olika sätt kan de tre tomma bänkarna väljas i ett klassrum där det finns 27 elever och 30 bänkar? Hur många olika sittordningar är möjliga i denna klass? c) Hur många år skulle det ta för en dator att gå igenom alla olika sittordningar i del a, om den kan behandla en biljon (10^{12}) sittordningar i sekunden? Ett år är i medeltal 365,25 dygn långt.

12. Mängden av ett radioaktivt ämne minskade på ett år med 0,043%. Bestäm ämnets halveringstid.

13. Priset på en vara höjdes med p%. På grund av dålig åtgång sänktes priset senare med $2p$ %, vilket resulterade i ett pris som var 5,5% lägre än före prishöjningen. Ställ upp en ekvation och bestäm p med hjälp av ekvationen.

14. En person spelar varje vecka på lotto genom att via Internet välja en stående rad för tio veckor framåt i början av varannan månad. Beräkna hur mycket pengar personen skulle ha på sitt bankkonto, om han istället för att spela på lotto i 40 år satte in 7 euro på kontot i början av varannan månad. Insättningarn börjar den 1 januari och har en årsränta på 1,5%. Källskatten beaktas inte.

15. Vid en automatisk hastighetskontroll fick man under ett dygn information om sammanlagt 4190 fordon som passerade mätstället. Medelvärdet av hastigheterna i samplet var 97,75 km/h och standardavvikelsen 10,70 km/h. Hastigheterna var approximativt normalfördelade. a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för medelvärdet (väntevärdet) av hastigheterna. b) Uppskatta hur många av de följande 1000 fordonen det är som har en hastighet av över 90 km/h när de passerar mätstället.

3.2 Lång kurs

1. a) Förenkla uttrycket $(1 + x)^3 - (1 - x)^3$. b) Lös ekvationen $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1}$

2. a) Derivera uttrycket $(x^3 + 1)e^{2x}$ b) Beräkna integralen $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

3. Betrakta en cirkel med arean A. Hur stor är arean av en kvadrat som omskriver cirkeln? Hur stor är aran av en kvadrat som är inskriven i cirkeln?

4. Dela upp vektorn $\vec{i} + 7\vec{j}$ i komponenter parallella med vektorerna $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ och $\vec{b} = -7\vec{i} + 6\vec{j}$.

5. Ett föremål tillverkat av en legering av silver och koppar väger 150g, och dess densitet är 10,1 kg/dm^3. Hur många procent av föremålets vikt består av silver och hur många procent av koppar? Silvrets densitet är 10,5 kg/dm^3 och kopparns 9,0 kg/dm^3.

6. Bestäm det största och minsta värdet för funktionen $f(x) = \cos^2 x + \sin x$.

7. En tomt har formen av en fyrhörning, där tre på varandra följande hörn har vinklarna $70°$, $125°$ och $110°$. Sidorna som sammanbinder dessa hörn är (i samma ordning) 88 meter och 120 meter långa. Hur stor är den fjärde vinkeln? Hur långa är de två övriga sidorna? Ange längderna med en meters noggrannhet.

8. Bestäm den ekvation $ax + by + cz = 1$ som beskriver ett plan som går genom punkten $(1, 1, 1)$ och skär xy-planet längs linjen $x - y = 2$.

9. En rak cirkulär kon har höjden h, medan basytans radie är r. Innuti konen placeras en sfär som tangerar manteln och basytan. Bestäm sfärens radie R. Bestäm $\lim_{h\to\infty} R$ när r är konstant, samt $\lim_{r\to\infty} R$ när h är konstant.

10. Om en fyrabarnsfamilj vet vi att åtminstone ett av barnen är flicka. Vilken är då sannolikheten att alla barnen är flickor? Om vi vet att minst två av barnen är flickor, vilken är då sannolikheten att två av barnen är pojkar? Vi antar att pojkar och flickor föds med lika stor sannolikhet. Enligt statistiken föds pojkar med sannolikheten $p = 0{,}51$ och flickor emd sannolikheten $t = 0{,}49$. Vilka blir svaren om dessa sannolikheter används? Vi antar att barnen fått sina kön oberoende av varandra.

11. Ekvationen $2x^3 + y^2 = 6$ bestämmer i en omgivning av $x = 1$ en deriverbar funktion $y = y(x)$ med $y(1) = -2$. Bestäm ekvationen för tangenten till funktionens graf i punkten $(1, -2)$ och beräkna den punkt där tangenten skär x-axeln.

12. Låt (x_n) och (y_n) vara geometriska talföljder. Visa att produktföljden $(z_n) = (x_n y_n)$ också är en geometrisk talfljd. Om den geometriska följden (x_n) konvergerar och den geometriska följden (y_n) divergerar, är då följden (z_n) alltid divergent?

13. En cirkelbåge har ändpunkterna $(-2, 0)$ och $(2, 0)$, och bågen löper genom punkten $(0, 1)$. När bågen roterar runt x-axeln uppstår en rotationsyta. Bilda en integral som upttrycker volymen av den kropp som ytan avgränsar. Integralen behöver inte beräknas.

14. Visa att funktionen

$$y(x) = \frac{(x-a)^2 - 1}{x - a}$$

är en lösning till differentialekvationen $(y')^2 - (y^2 + 4)(y' - 1) = 0$ för alla reella värden på konstanten a. För vilka värden på a satisfierar funktionen begynnelsevilkoret $y(1) = 2$?

15. Beräkna integralen $\int_0^4 x^2 dx$ numeriskt med hjälp av Simpsons regel. Dela integreationsintervallet i fyra delintervall. Verifiera att resultatet är exakt. Undersök med hjälp av feltermen vilka gradtal på polynom som är sådana att alla polynom av dessa gradtal kan integreras exakt med Simpsons regel.