Täljaren

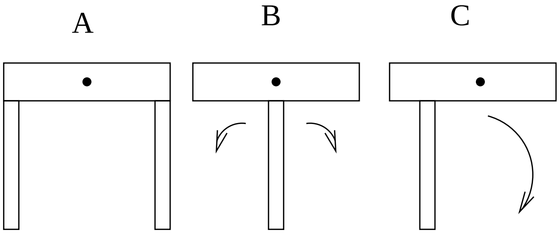
— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

augusti 2006

1 Ett bord

Under sommaren har man funderat på att tillverka ett bord för placering i ett av hörnen i ett åttkantigt lusthus. Då bordet bör kunna stå av sig självt då det är obelastat måste benen placeras så att tyngdpunkten inte hamnar utanför något av benens stödjepunkter. I bild 1 visas tre bord där bord A är det stabilaste eftersom tyngdpunkten ligger mellan de båda benen. Bord B har fått benet precis under tyngdpunkten och det *kan* stå upp om det får stå utan den minsta rubbning, men det behövs inte mycket för att det skall tippa åt endera hållet. Bord C kommer däremot ovillkorligen att välta. [1]



Figur 1: Tre bord med olika placering av benen men samma placering av tyngdpunkten (svart prick).

1.1 Tyngdpunkten

Vi skall inte gräva ner oss allt för mycket i vad tyngdpunkten har för fysikalisk betydelse.[2] Det intressanta som ligger framför oss är hur vi beräknar tyngdpunkten i en kropp. I en formelsamling[3] står formeln

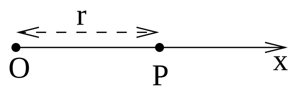
$$R = \frac{1}{M}\int r\, dm = \frac{1}{M}\int r\rho(r)\, dV$$

[1] Gör gärna egna laborationer med tyngdpunkten genom att använda olika föremål.

[2] Tyngdpunkten är ett centralt begrepp inom fysiken och det fungerar bra för att förklara allehanda företeelser, t.ex. fallet med borden, eller varför det nästan är omöjligt att välta en segelbåt, eller varför du inte kan få en rund stav, med frigolit i ena ändan och bly i andra ändan, att flyta med blyet över frigoliten. Arkimedes är den vi har att tacka för införandet av tyngdpunkten. Tyngdpunkten hos en kropp kan betraktas som den punkt vari hela massan av kroppen har placerats.

[3] Från `http://en.wikipedia.org/wiki/Centre_of_mass`

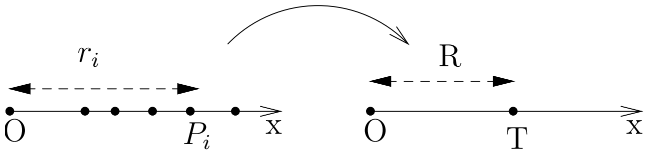
Vi skall försöka göra det lite tydligare. Tyngdpunkten för en kropp är en punkt i kroppen, vi kallar den T. För att ange positionen för en punkt i kroppen måste vi ha en referenspunkt att utgå från. Vi lägger därför in ett koordinatsystem med x-, y- och z-axlar och utgår i våra beräkningar från origo i detta. Tyngdpunkten specificeras av de tre riktningarna (x, y och z) men vi kan nöja oss med att beräkna tyngdpunkten i en av riktningarna åt gången och sedan upprepa proceduren med var och en av de övriga två riktningarna.



Figur 2: Figuren visar punkten P som den enda punkten i kroppen.

Därför börjar vi betrakta det allra enklaste fallet (se figur 2) där all massa hos kroppen ligger utsprid på x-axeln (d.v.s. ingen utbredning åt något annat håll) och vi har endast en enda masspunkt P med massan m på avståndet r från origo. Tyngdpunkten blir då densamma som P.

Nästa steg är att betrakta fler masspunkter som är utspridda längs x-axeln. Vi antar att vi har masspunkterna $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ enligt den vänstra kroppen i figur 3 och dessa ersätts med tyngdpunkten enligt den högra delen.



Figur 3: Flera masspunkter P_i som ersätts med en enda tyngdpunkt T.

För att beräkna läget av tyngdpunkten T (avståndet R) beräknar vi ett viktat medelvärde av alla dessa vikter P_i med motsvarande massa m_i på avståndet r_i från origo. Den totala massan är

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

och tyngdpunktens läge ges av

$$R = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i r_i \tag{1}$$

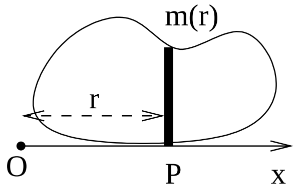
Exempelvis kan man tänka sig fördelningen $r_i = i$ och $m_i = i$ vilket ger

$$M = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

och

$$R = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} i \cdot i = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

Nästa steg är att betrakta en hel kropp och inte endast enskilda masspunkter. Detta sker genom att dela upp kroppen i ett oändligt antal delar och beräkna tyngdpunkten som en



Figur 4: En kropp uppdelad i skivor med en massa $m(r)$ på ett avstånd r.

integral. Betraktar vi kroppen i figur 4 ser vi hur en kropp styckas upp i skivor vinkelräta mot x-axeln.

Den totala massan ges då av

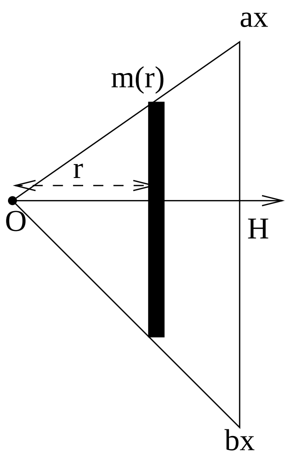
$$M = \int_a^b m(r)\, dr \tag{2}$$

där a och b är gränser för kroppens utbredning i x-led. Tyngdpunktens läge ges då också av en integral

$$R = \frac{1}{M}\int_a^b r\, m(r)\, dr = \frac{\int_a^b r\, m(r)\, dr}{\int_a^b m(r)\, dr} \tag{3}$$

Om kroppen är homogen och har samma densitet över allt så räcker det att betrakta arean av figuren istället för massan.

Vi beräknar nu tyngdpunkten för en triangel enligt figur 5.



Figur 5: Tyngdpunkten hos triangeln som begränsas av linjerna ax och bx och har utsträckning mellan $x = 0$ och $x = H$. Massan hos en tunn skiva $m(r) = ar - br = r(a - b)$.

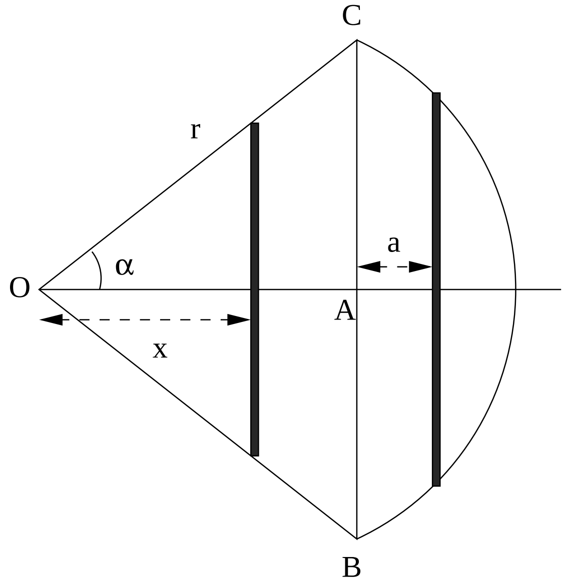
Massan får vi av (2) och är

$$M = \int_0^H r(a-b)\, dr = (a-b)\frac{H^2}{2}.$$

Tyngdpunkten är

$$R = \frac{2}{(a-b)H^2}\int_0^H r^2(a-b)\, dr = \frac{2}{3}H.$$

Tyngdpunktens position är sålunda placerad på $\frac{2}{3}$ avstånd från origo.



Figur 6: Cirkelsektorn har en medelpunktsvinkel på 2α och en radie r.

1.2 Cirkelsektorn

Cirkelsektorn som vi nu vill beräkna tyngdpunkten ser ut som i figur 6.

I tyngdpunktsberäkningar kan vi dela upp kroppen i två delar och beräkna tyngdpunkten för dessa var och en för sig och sedan lägga ihop de båda delarna till en helhet genom att betrakta dem som fristående delar. Delarna blir triangeln OBC respektive cirkelsegmentet som skärs av med linjen BC.

Tyngdpunkten för triangeln ligger på avståndet $\frac{2}{3}r\cos\alpha$ från O enligt tidigare resultat. Arean är $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha = r^2\sin\alpha\cos\alpha$ vilket ger att den sökta integralen i (1)

$$\int_{OBC} r\, m(r)\, dr = \frac{2r\cos\alpha}{3}\cdot r^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2r^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3}$$

Arean av hela cirkelbågen är $r^2\alpha$ så det kvarstår att beräkna

$$\int_{r\cos\alpha}^{r} x\, m(x)\, dx$$

då $m(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Det ger

$$\int_{r\cos\alpha}^{r} 2x\sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{-2}{3}\left[\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r\cos\alpha}^{r} =$$

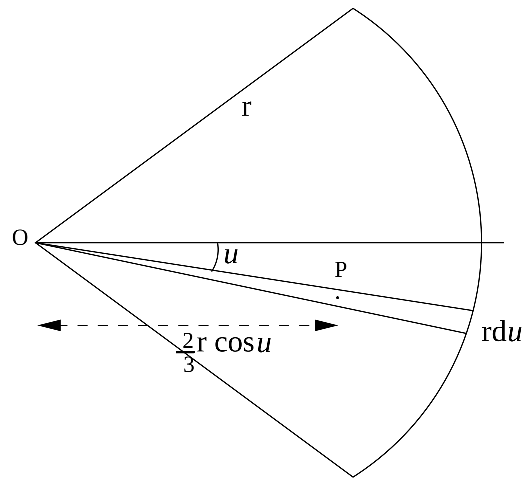
$$\frac{2}{3}\left(r^2 - r^2\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2r^3}{3}|\sin^3\alpha| = \frac{2r^3\sin^3\alpha}{3}$$

och den sista likheten följer då $0 < \alpha < \pi$. Tyngdpunktens avstånd från origo ges sålunda av

$$R = \frac{\frac{2}{3}r^3\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{2}{3}r^3\sin^3\alpha}{\alpha r^2} = \frac{2r}{3\alpha}\left(\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha\right)$$

$$= \frac{2r}{3\alpha}\left(\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)\right) =$$

$$\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$



Figur 7:
Cirkelsektorn uppdelad i mindre cirkelsektorer där tyngdpunkten P ligger på avståndet $\frac{2}{3}r\cos u$. Den lilla cirkelsektorn har arean $\frac{1}{2}r^2 \cdot du$.

Ett annat sätt att beräkna samma sak är att se cirkelsektorn som uppstyckad i små cirkelsektorer så som figur 7 visar.

Integralen beräknas genom att låta u gå från $-\alpha$ till α. Vi får

$$R = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3}r\cos u \cdot \frac{1}{2}r^2 du}{r^2\alpha} = \frac{r}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos u \, du =$$

$$= \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$$

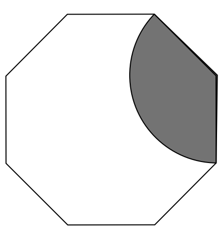
För en vinkel $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ erhålls

$$R = \frac{2r\sin\frac{3\pi}{8}}{3\cdot\frac{3\pi}{8}} = \frac{16}{9\pi}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r \approx 0.52881r$$

Tyngdpunkten ligger ungefär mitt i cirkelsektorn.

1.3 Vinkelsumman i n-hörningen

I förra stycket sa jag att $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ utan vidare motivering. Detta tänkte jag nu motivera. Bordet skall ha formen som det skuggade området i figur 8.Medelpunktsvinkeln i cirkelsektorn som tillika är vinkeln i den regelbundna åttahörningen utgör en åttondel av den totala vinkelsumman i en oktagon.

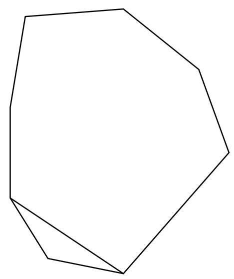


Figur 8: Ett bord passande i hörnet i en oktagon.

För vinkelsumman v_n i en n-hörning ($n \geq 3$) gäller formeln

$$v_n = \pi(n-2)$$

Detta bevisas genom induktion. För $n = 3$ är $v_3 = \pi$ vilket är ett välkänt resultat. Vi antar sålunda att påståendet stämmer för n. En $n+1$-hörning kan delas upp i en triangel och en n-hörning genom att man drar en sträcka mellan två hörn, med ett hörn emellan; se figur 9. Vi får enligt induktionsan-



Figur 9: Uppdelning av $n+1$-hörning i en triangel (vinkelsumma π) samt en n-hörning (vinkelsumma v_n).

tagandet

$$v_{n+1} = v_n + \pi = \pi(n-2) + \pi$$

som vi förtydligar till

$$v_{n+1} = \pi\left((n+1)-2\right)$$

vilket är samma resultat som formeln ger oss. Enligt induktionsprincipen stämmer formeln för alla n.

Speciellt gäller formeln för $n = 8$ som ger att i den regelundna åttahörningen är varje vinkel $\frac{6\pi}{8}$ och α är hälften av detta.