# Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm / www.taljaren.se

juli 2006

## 1 Redaktören har ordet

Nu har redaktionen äntligen tagit sig samman och höjt aktivitetsnivån. Här kommer sommarens utgåva för att de sköna stunderna i hängmattan skall vara räddade. Antalet personer som ännu inte har protesterat mot att få Täljaren i brevlådan har nu ökat och uppgår till sju. Om någon inte önskar få detta så säg till. Låt oss hoppas att antalet inte sjunker allt för mycket. Som vanligt uppmanas läsarskaran att skicka in artiklar och funderingar för publicering och diskussion.

Lösningen på problemet i förra Täljaren verkar ha varit en succé i undervisningssituationer, vilket visar på vikten av flitigt läsande av Täljaren.

## 2 Nästan en cirkel

I samband med konstruktionen av underlaget till den rullande kvadraten i Täljaren januari 2006 så slår det en hur mycket underlaget påminner om ett cirkelsegment. Formen på underlaget ges av

$$f(x) = \sqrt{2}s - \frac{s}{2}\left(e^{x/s} + e^{-x/s}\right), \quad x \in [0, s\log(1+\sqrt{2})]$$

Vi definierar en cirkelbåge genom

$$c(x) = \sqrt{s^2 - x^2}, \quad x \in [0, s\log(1+\sqrt{2})]$$

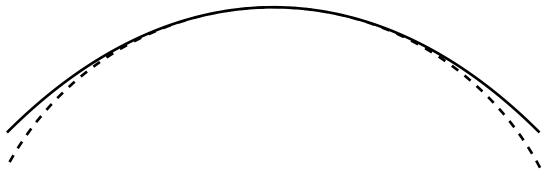
Plottas graferna och cirkeln translateras så visas resultatet i figur 1. De stämmer rätt bra överens om man har modesta krav på exakthet.

Vi bestämmer Taylorutvecklingarna av de båda funktionerna och får

$$f(x) = s(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2s}x^2 - \frac{1}{24s^3}x^4 - \frac{1}{720s^5}x^6 + O(x^8)$$

$$c(x) = s - \frac{1}{2s}x^2 - \frac{1}{8s^3}x^4 - \frac{1}{16s^5}x^6 + O(x^8)$$

Bortsett från en translation i vertikalled så är de lika i första termen och skiljer sig inte så dramatiskt åt i $x^4$ termen. Då vi håller oss inom intervallet $[-s\log(1+\sqrt{2}), s\log(1+\sqrt{2})]$ så får fjärdegradstermen en skillnad på $\frac{s\log(1+\sqrt{2})^4}{12} \approx 0.05s$, d.v.s. 5% av halva sidlängden. Det ger för $s = 40$mm en skillnad på 2mm.



Figur 1: Den heldragna linjen är den upp-och-ned-vända kedjelinjen och den streckade linjen är cirkelbågen.

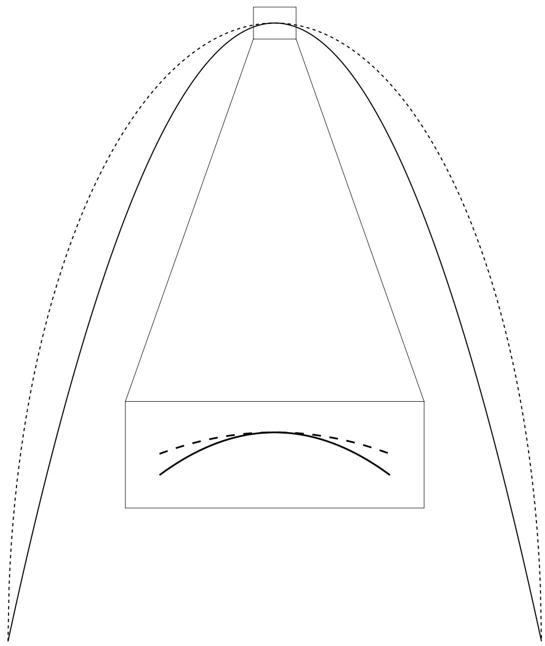
Translationen av cirkeln ges av $\sqrt{2}s - 2s$. Skillnaden mellan de två formerna kan då beskrivas av

$$e(x) = f(x) - c(x) - \sqrt{2}s + 2s = \frac{1}{12s^3}x^4 + \frac{11}{180s^5}x^6 + \frac{787}{20160s^7}x^8 + \ldots$$

En evaluering av $e(s\log(1+\sqrt{2}))$ ger ett ungefärligt värde på $0.11s$.

## 3 Nästan en ellips

En cirkel är ju nästan en ellips[1], men vad finns det mer som nästan är en ellips? Jo en parabel. Under vissa förutsättningar är det en hyfsad approximation iallafall.



Figur 2: En medioker bild av en parabel och ellips som har tre gemensamma punkter. Den lilla bilden är en förstoring av den del där de är som mest "lika".

Detta tänkte jag spåna vidare på i nästa nummer. Skicka gärna egna funderingar kring detta.

[1] Eller är det tvärtom? En ellips är nästan en cirkel?