Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm / www.taljaren.se

juni 2006

1 Ett problem

Kristian Strid presenterade ett problem:

> Finn (om det finns) talet x sådant att $99 \cdot x = 1x1$ där $1x1$ innebär att skriva dit en extra 1:a i början av talet x och en 1:a i slutet av talet x.

För att angripa problemet låter vi N vara antalet siffror i x, d.v.s. $N = \lfloor \lg x \rfloor + 1$ och skriver sambandet som

$$99x = 10^{N+1} + 10x + 1 \Leftrightarrow$$

$$89x = 10^{N+1} + 1.$$

Högerledet är alltså delbart med 89. Om vi helt fräckt hoppas på att talet $10000....0001$ är delbart med 89 så kan vi ju dividera talen och finna x. Vi gör därför detta genom att börja dividera $1000.../89$ där vi fyller på med nollor i täljaren efter behov. Divisionsprocessen fortgår ända tills läga infinner sig att skriva in en 1:a i slutet istället för den sedvanliga nollan. 1:an skall användas när vi ser att då kommer resten att bli 0 inför nästa steg i divisionsalgoritmen, detta inträffar när vi har fått resten 8 eller 80 eftersom $89 \cdot 9 = 801$ är det enda sättet att få en 1:a i slutet så att divisionen går jämnt upp.

Med papper och penna finner man att $x =$1 12359 55056 17977 52809 går bra.

Vi observerar dock att perioden för $\frac{1}{89}$ är 44 siffror lång med siffrorna 01 12359 55056 17977 52808 98876 40449 43820 22471 91. Denna utveckling säger oss att vi kunde högst ha fått 44 olika rester vid divisionen. Det som gör vårt problem lösbart är att resten 8 eller 80 uppträder vid fastställandet av den periodiska decimalutvecklingen med hjälp av vanlig division.

Vi har alltså oändligt många tal som löser problemet och dessa skapas genom att fylla på med siffrorna i perioden framför den lilla lösniningen x vi fann genom divisionen.

Uppgift 1 Är problemet lösbart om vi istället har $99x = 1x3$?

Den uppgiften får vi lösa genom att undersöka vilka rester som kan uppkomma vid division med 89. Då slutsiffran är 3 behöver vi resten 62, vilket inte förekommer i decimalutvecklingen.

2 Periodlängden i oändliga decimalutvecklingar av bråk

Om vi vill finna längden av perioden i en oändlig decimalbråksutveckling av ett bråk på formen $\frac{1}{p}$ där p är ett primtal (ej 2 eller 5) så kan vi först formulera problemet, som att om vi har längden N i perioden, så gäller det att om vi istället dividerar 10^N med p så får vi samma periodiska utveckling av decimalerna *efter* decimalkommat. Differensen av $\frac{10^N}{p} - \frac{1}{p}$ är sålunda perioden med sina N siffror. Det ger

$$10^N - 1 = p \cdot X \tag{1}$$

där X är ett heltal. Annorlunda uttryckt, är $10^N \equiv 1 \mod p$. Enligt Fermats lilla sats är $N = p - 1$ en möjlig lösning till denna ekvation som då skulle innebära att vi kommer att få fram alla tänkbara rester vid division med p, d.v.s. 1, 2, 3, 4, ..., $p - 1$. Men det är inte säkert att *ordningen* för 10 är $p - 1$. Ordningen för 10 är det minsta positiva tal k sådant att $10^k \equiv 1 \mod p$. Lagranges sats säger att ordningen k för ett tal a uppfyller $k|p - 1$. I fallet med $p = 89$ så har vi delarna $1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88$ som möjliga ordningar för 10. Ordningen är alltså 44 eftersom periodlängden var 44.