Täljaren

— Matematiskt dividerande —

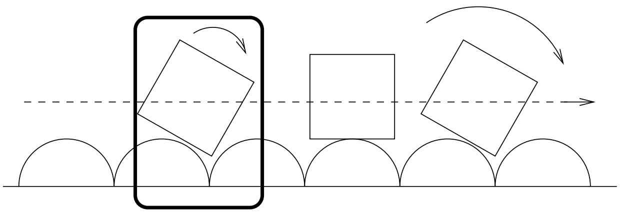
Gunnar Lindholm / www.taljaren.se

januari 2006

1 Att vara ute och cykla

Stan Wagon, professor i matematik och datavetenskap vid Macalester College, St. Paul, Minnesota, kan på http://www.stanwagon.com ses cykla på en cykel med kvadratiska hjul. Så här i hjultider blev jag lite gripen av detta och tänkte först och främst härleda formen på underlaget och sedan konstruera något liknande.

Tanken är vi har ett kvadratiskt hjul som rullar över en yta enligt figur 1. Tanken är att centrum på det kvadratiska hjulet skall röra sig på en konstant nivå hela tiden. Den högsta punkten på underlaget kommer då att kännetecknas av att där ligger hjulet "platt" och underlaget kommer vara symmetriskt till höger respektive vänster om denna punkt.



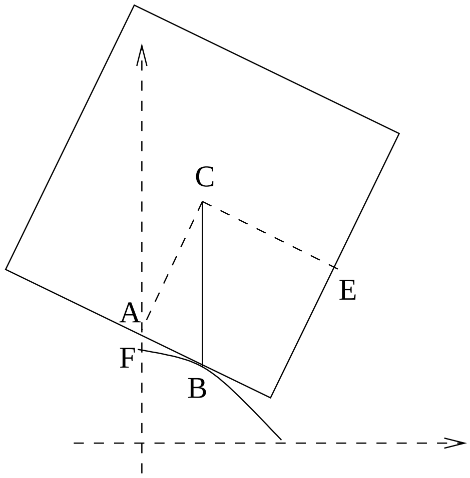
Figur 1: Den rullande kvadraten

Vi förstorar upp figuren och får bilden i figur 2 .

C är centrum på kvadraten och kontakten med underlaget sker i punkten B. A och E är mittpunkter på sidorna. F är den högsta punkten på underlaget. Punkten A sammanfaller med F. Vi inför ett koordinatsystem som har x-axeln parallell med rörelsen för C. y-axeln låter vi gå genom F. Underlagets utseende kan vi nu beskriva med funktionen $f(x)$ där x är x-koordinaten för B och C. Att B och C har samma x-koordinat förklaras genom att vi tänker oss att C rör sig vågrätt och kvadraten roterar samtidigt. Vid varje läge gäller att underlaget tangerar i en punkt som ligger rakt under centrum i kvadraten.

Kalla kvadratens sida för $2s$. Det gäller då att den konstanta höjden som punkten C skall befinna sig på är $f(0)+s$.

Rullvillkoret blir sådant att sträckan FB längs kurvan skall vara likamed AB. Punkten B har koordinaterna $(x, f(x))$ och vinkeln ACB ges av α (som beror på x). Det



Figur 2: Kontakten mellan hjulet och underlaget. Figuren är oproportionerlig.

ger ekvationen

$$\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt = |s \tan\alpha|$$

För lutningen $f'(x)$ på underlaget i B gäller att det är det samma som vinkeln ACB vilket ger oss

$$\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt = -sf'(x)$$

Minustecknet kommer ifrån det faktum att för det aktuella intervallet har vi $f'(x) < 0$ och att båglängden måste vara positiv. Derivering ger

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = -\frac{1}{s}$$

som löses först till

$$\text{arsinh } f'(x) = -\frac{1}{s}x + C$$

$$f'(x) = \sinh(C - x/s) = \frac{e^{C-x/s} - e^{-(C-x/s)}}{2}$$

Initialvillkoret $f'(0) = 0$ ger oss $e^C - e^{-C} = 0$ d.v.s. $e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0$. D.v.s.

$$f'(x) = \frac{e^{-x/s} - e^{x/s}}{2}$$

Vi kan redan här observera att

$$f''(x) = -\frac{e^{x/s} + e^{-x/s}}{2s} < 0$$

vilket innebär att vi har en konvex funktion och det är alltså ingen risk att kvadraten slår i någon del som den redan har passerat.

Ytterligare en integrering ger oss

$$f(x) = D - s\cosh(-x/s) = D - \frac{s}{2}\left(e^{x/s} + e^{-x/s}\right) \quad (1)$$

För att bestämma ett värde på konstanten D betänker vi att det största avståndet på CB är $\sqrt{2}s$ som inträffar precis då hörnet på kvadraten vidrör underlaget. Där detta inträffar[1] gäller att $f'(x) = -1$ som ger

$$-1 = \frac{e^{-x/s} - e^{x/s}}{2} \Leftrightarrow \left(e^{-x/s}\right)^2 - 2e^{x/s} - 1 = 0$$

som ger $e^{x/s} = 1 + \sqrt{2}$, d.v.s. $x = s\log(1 + \sqrt{2})$.

Om vi låter detta motsvara en tangering av x-axeln så gäller alltså att $f(s\log(1 + \sqrt{2}) = 0$ som insatt i (1) ger

$$0 = D - \frac{s}{2}\left(e^{\log(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{e^{\log(1+\sqrt{2})}}\right)$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow D = s\sqrt{2}$$

. Underlagets form kan alltså i det aktuella området beskrivas med

$$f(x) = \sqrt{2}s - \frac{s}{2}\left(e^{x/s} + e^{-x/s}\right)$$

där $x \in [0, s\log(1 + \sqrt{2})]$.

Den intresserade hänvisas till Hall, L, and Wagon S. 1992, Roads and Wheels. *Mathematics Magazine* 65(December) 283-301 för mer intressant läsning där de gör en ordentligare utredning och behandlar fler former.

Kurvan $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kallas för *kedjelinjen* och beskriver den form som en kedja som hängs upp i sina ändar antar.

1.1 Frågor

1. Vad innebär det att något rullar och hur beskriver man en sådan rörelse? Det kan man fundera länge på, det gjorde i allafall jag.

2. Kan man få ett fordon (tvåhjuligt eller fyrhjuligt) att beskriva en cirkulär bana och inte bara gå rakt framåt? Hur skall underlaget och hjulen då se ut?

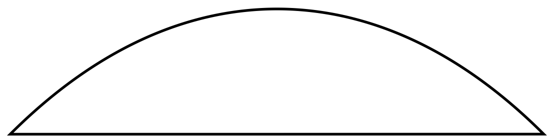
1.2 Praktisk konstruktion

För att rent praktiskt konstruera något som kan rulla med kvadratiska hjul behövs en mall för underlaget som är skalenlig. Det skapar jag i följande postscriptprogram.

```
%!PS-Adobe-3.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 80 170 310 260
/mm { 2.834646 mul } def
/cm { 28.34646 mul } def
200 200 translate
/s {40 } def
/roten {2 sqrt} def
/upp {2 sqrt 1 add ln s mul} def
/ner {upp neg} def
0 0 moveto
ner 0.1 upp {
   dup roten exch s div dup neg
   2.718281828459045 exch exp
   exch 2.718281828459045 exch
   exp add 2 div sub s mul
   mm exch mm exch lineto
} for
0 0 lineto % close the path
stroke
showpage
```

[1] Denna insikt, att $f'(x) = -1$, fick jag ifrån den artikel som jag hänvisar till i slutet av detta avsnitt. Jag var själv helt ute och cyklade på den punkten.

Resultatet visas i figur 3. Det är skalenligt och kan direkt användas som mall.



Figur 3: Uppochnervänd kedjelinje för $s = 40$ mm.