Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm / www.taljaren.se

december 2005

Ledare

Ibland är man väldigt kreativ och då kan resultatet bli som det du läser nu. En sammanställning av den senaste tidens händelser rörande matematik och undervisning av M..

Förhoppningen är att Täljaren i framtiden skall bli ett storslaget tidsfördriv som läses av stora skaror (≥ 1). Ifall du har något intressant att berätta, rörande matematik, undervisning av detta eller något närbesläktat område, skicka det till mig för publicering. Alla bidrag är välkommna, speciellt de som kan väcka het debatt.

gunnar@taljaren.se Hör även av dig ifall du önskar få meddelande varje gång ett nytt nummer är klart.

1 Problem

Kristian Strid visade mig följande problem: Visa att

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \qquad \text{för } a, b > 0$$

och när gäller likhet?

Läsaren uppmanas att lösa det själv först och sedan antingen läsa min lösning som följer här eller skicka in en elegantare lösning.

Skriv om båda leden till

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{ab}} \leq \frac{\sqrt[3]{2(a+b)^2}}{\sqrt[3]{ab}}$$

och då $\sqrt[3]{ab} > 0$ så

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \leq \sqrt[3]{2(a+b)^2}$$

Då $a, b > 0$ så finns det tal $x, y > 0$ så att $a = x^3$ och $b = y^3$ som efter att båda leden upphöjes till 3 , vilket bevarar olikheten, ger

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 \leq 2\left(x^3 + y^3\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 \leq 2x^6 + 4x^3y^3 + 2y^6 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x^6 + y^6 + 4x^3y^3 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 - 2x^4y^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)^2 + 2x^2y^2(x-y)^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (x-y)^2\left(\left(x^2 + y^2\right)(x+y)^2 - 2x^2y^2\right)$$

Vänsterledet kan nu uppskattas nedåt med aritmetiska och geometriska olikheten

$$(x-y)^2\left(2\sqrt{x^2y^2}\left(2\sqrt{xy}\right)^2 - 2x^2y^2\right) \geq (x-y)^2\left(6x^2y^2\right) \geq 0$$

Likhet gäller när $x = y$, d.v.s. $a = b$. Det är nyttigt att behöva tänka till ibland. Observera att substitutionen ej är nödvändig, jag tyckte bara det blev lite enklare att skriva.

2 Nämnarens adventskalender

Det kom en adventskalender från Nämnaren i år igen. Det är alltid trevligt och lämpligt att sätta i händerna på eleverna.

3 Ett rop på hjälp

Från omvärlden rekomenderas följande inlägg att läsas: `http://ncm.gu.se/pb/viewtopic.php?pid=1`. För att säga vad jag tycker så kan det sammanfattas med

> Jag är helt övertygad om att man behöver kunskaper utöver just det område du skall undervisa om. Det är en nödvändighet, men dock ingen garanti för en bra undervisning. Utan djupare kunskaper så blir man begränsad och får svårt att koppla ihop delar inom ämnet till en helhet eller sätta in de olika områdena i ett större sammanhang, eller få in historiska aspekter. Matematiken får då lätt en "recept" karaktär där man bara lär sig tillvägagångssätt och aldrig får veta varför.
>
> Det har pratats mycket om satsningar på matematik, men det krävs handling också, t.ex. tydliga signaler när det gäller anställning av lärare och tjänstefördelning. Behörighet och adekvat utbildning.

4 Böcker

Jag bläddrade igenom boken *Projektarbete 100 p - Experimentboken - för naturvetenskapliga och tekniska projekt* av Krister Andersson Brolin och Magnus Ehinger med ISBN: 9144036663 och tyckte den verkade rätt trevlig. Något som bör sättas i händerna på elever som utför ett projektarbete med experimentell karaktär eller endast vill orientera sig i det naturvetenskapliga arbetssättet.

5 Debatt

Är det verkligen nödvändigt att eleverna kan rita ut höjderna i alla sorters trianglar, även trubbvinkliga sådana? Ja svarar undertecknad. Att dra olika höjder i en triangel är definitivt inte onödig kunskap utan det första steget i att lära sig vända och vrita på ett problem.